2902
18911171275
理论天体物理 TA：周智勤 zhouzhiqin@pku.edu.cn
2909
刘富坤：fkliu@pku.edu.cn.

《恒星大气物理》

《恒星光球的观测和分析》

《天体物理中的辐射机制》.

《Theoretical Astrophysics vol.1》.

形成、结构、组成、演化.

1905. A. Schuster 辐射转移.

1906. K. Schwarzschild 辐射平衡、局部热动平衡.

Photosphere：白光观测到、底层密度较大.

厚度相对较小. $7\times10^{-4}R_S$ / 500 km

发出黑体辐射、连续谱.

Chromosphere：单色光看到大气成分 $3\times10^{-3}R_S$/
2000 km.

Hα发射线、对FUV/radio波段贡献

F-M晚型星、O-A早型星 有与太阳

色球物理性质相似.

Corona：色球之外 >> R_S 全食、日冕仪

对可见光贡献忽略、radio → x-ray（自由-自由/轫致辐射）

光致电离：与色球层谱线产生有关.

几乎所有光谱型恒星都有冕.

可见光光谱 Continous Spectrum + Absorbtion Lines.

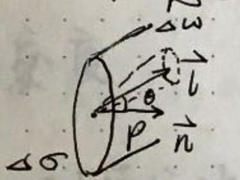
少数恒星 Emission Lines 大气厚度 ~/>> 恒星半径.

延展大气 / 恒星包层.

大气模型：连续光谱；吸收光谱；发射光谱；化学组成.

辐射场：辐射强度

任意点 P 任意方向 $\vec{i}$



以 $\vec{i}$ 为轴线做角元 $\Delta\omega$.

在 $\Delta\sigma$ 上每一点都做 $\Delta\omega$ 立体角，包络面 $\Delta\Omega$.

ΔE_ν 是 Δt 内 经过 $\Delta\sigma$ 落在 $\Delta\Omega$ 内 频率在

$\nu \to \nu + \Delta\nu$ 内. 若 Δt、$\Delta\sigma$, $\Delta\omega$, $\Delta\nu \to 0$.

$\Delta E_\nu \propto \Delta\sigma \cos\theta$. (Taylor 展开忽略高次项)

故 $\Delta E_\nu \propto \Delta\sigma \cos\theta \, \Delta t \, \Delta\omega \, \Delta\nu$

$$I_\nu \equiv \lim_{\Delta\sigma\to 0, \Delta t\to 0, \Delta\omega\to 0, \Delta\nu\to 0} \frac{\Delta E_\nu}{\Delta\sigma \cos\theta \, \Delta t \, \Delta\omega \, \Delta\nu}$$

位置、辐射方向、时间、频率、函数，与所取面元(定义)方向无关。

$erg\cdot cm^{-2}\cdot sec^{-1}\cdot Hz^{-1}\, sr^{-1}$

I_ν 与方向无关，各向同性，与位置无关，均匀。

$$dE_\nu = I_\nu d\sigma \cos\theta\, dt\, d\omega\, d\nu$$

对所有方向积分

$$dE_\nu = d\sigma\, dt\, d\nu \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta\, d\omega$$

$$= d\sigma\, dt\, d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I_\nu\, d\theta \cos\theta \sin\theta$$

再除以 $d\sigma\, dt\, d\nu$.

$$\Rightarrow \pi F_\nu \equiv \frac{dE_\nu}{d\sigma\, dt\, d\nu} = \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta\, d\omega.$$ 辐射流.

单位时间的单位辐射流(正向通过与反向通过之差)

大小与面元在空间里的位置与方向有关. $erg\cdot cm^{-2} sec^{-1} Hz^{-1}$

$$\vec{F} = \int_{4\pi} I_\nu \vec{i}\, d\omega.$$

由于 dE_ν 守恒，但 $4\pi r^2$ 增大，于是穿过单位面积的辐射流减少，但 I_ν 不变，因为 $d\omega$ 也按平方反比变化。

在恒星大气中对沿着半径向外的辐射流感兴趣.

假设辐射场轴对称.

$$\pi F_\nu = 2\pi\int_0^\pi I_\nu(\theta)\cos\theta\sin\theta\, d\theta .$$

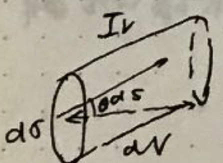
平均辐射强度 $J_\nu = \dfrac{\int I_\nu d\omega}{\int d\omega} \xrightarrow{\text{对整球面}} \dfrac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu d\omega$

$erg\cdot cm^{-2}\cdot sec^{-1}\cdot Hz^{-1}$

各向同性 $J_\nu = I_\nu$

辐射密度.

某一时刻单位体积内包含的辐射能量.



$dV = d\sigma\, ds$

从 $d\sigma$ 进入能量

$I_\nu\, d\sigma \cos\theta\, d\omega$

光通过体元

$$dt = \frac{dl}{c} = \frac{ds}{c\cos\theta}.$$

获得能量 $dE_\nu = I_\nu d\sigma \cos\theta\, d\omega\, dt$

$$= \frac{1}{c} I_\nu\, d\omega\, dV.$$

对立体角积分 再除体积

$$u_\nu = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu d\omega \qquad erg\cdot cm^{-3}\cdot Hz^{-1}$$

辐射压力、 $h\nu$ 的 quata 携带 $h\nu/c$ 的动量

压力：单位时间通过单位截面积光量子携带的动量.

$dE_\nu = I_\nu \cancel{\cos} \cos\theta \, d\omega \, d\nu \, d\sigma \, dt$

动量大小 dE_ν / c

考虑在法线方向上才有贡献

$$\frac{dE_\nu}{c}\cos\theta = d\sigma \, dt \, \frac{1}{c} I_\nu \cos^2\theta \, d\omega \, d\nu$$

对立体角积分

$$dp_\nu = d\sigma \, dt \, d\nu \, \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu \cos^2\theta \, d\omega$$

$$p_{R,\nu} = \frac{dp_\nu}{d\sigma \, dt \, d\nu} = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu \cos^2\theta \, d\omega.$$

单色辐射垂直于单位面积的压力.

$erg \cdot cm^{-3} \cdot Hz^{-1}$ 与能量密度同量纲.

辐射压力是张量.

取决于面元取向. 辐射方向.

$$\overleftrightarrow{p}_{R,\nu}(r,t) = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu \cancel{\cos^2\theta} \, \vec{l}\,\vec{l} \, d\omega. \quad (\text{脱离了面元本身})$$

$$(p_{R,\nu})_{j,k} = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu \, l_j l_k \, d\omega.$$

总辐射强度 / 辐射~~通~~流 / 辐射密度 / 辐射压力.

辐射场的微观描述

X-ray, γ-ray.（难以形成连续光子流）

$f_R(\vec{r}, \vec{l}, \nu, t)$ 光子分布函数

$$\underset{|||}{dE_\nu} = I_\nu \cos\theta \, d\sigma \, d\omega \, d\nu \, dt.$$

$$h\nu f_R \, c \, dt (\vec{l} \cdot \vec{n} \, d\sigma) \, d\omega \, d\nu$$

$$\Rightarrow I_\nu = c h\nu f_R(\vec{r}, \vec{l}, \nu, t).$$

f_R 单位 $\mathrm{photons \cdot cm^{-3} \cdot Hz^{-1} \cdot sr^{-1}}$

能量密度 $U_\nu = \int_{4\pi} h\nu f_R(\vec{r}, \vec{l}, \nu, t) \, d\omega$

~~总~~辐射流 $\pi F_\nu = c h\nu \int_{4\pi} f_R(\vec{r}, \vec{l}, \nu, t)(\vec{l} \cdot \vec{n}) \, d\omega$

辐射压力 $(P_{R,\nu}) = \int_{4\pi} [f_R(\vec{r}, \vec{l}, \nu, t) h\nu c] \frac{l_j l_k}{c} \, d\omega.$

$$= \int_{4\pi} [f_R(\vec{r}, \vec{l}, \nu, t) c l_j] \frac{h\nu l_k}{c} \, d\omega.$$

发射系数、消光(吸收)系数和源函数.

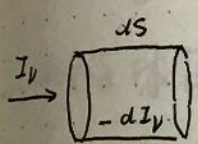
质量元 dm 发射能量

$$dE_\nu \propto dm\,dt\,d\nu\,d\omega$$

Def: $dE_\nu = j_\nu\, dm\,dt\,d\nu\,d\omega$.

即 $\dfrac{dE_\nu}{dm\,dt\,d\nu\,d\omega} = j_\nu(\vec{r}, \vec{t}, \nu)$ 单位 $erg\cdot g^{-1}\cdot sec^{-1}\cdot sr^{-1}\cdot Hz^{-1}$

吸收系数.



$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu\, ds.$$

↓

对频率ν的单位质量吸收系数 $cm^2\cdot g^{-1}$

$$I_\nu = I_\nu(0)\, e^{-\int_0^s \kappa_\nu \rho\, ds}$$

纯吸收层按指数衰减.

$$E_\nu = E_\nu(0)\, e^{-\int_0^s \kappa_s \rho\, ds} = E_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu}$$

Def $\tau_\nu = \int_0^s \kappa_\nu \rho\, ds$ 光学厚度(无量纲)

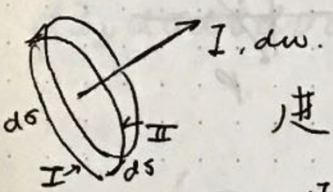
$\tau_\nu > 1$. 光学厚 $E_\nu \ll E_\nu(0)$ Optical thick

$\tau_\nu < 1$. 光学薄 $E_\nu \sim E_\nu(0)$.

源函数 $S_\nu \equiv j_\nu / \kappa_\nu$.

辐射转移方程.

静止介质 $d\sigma >> ds$.



进入能量

$$E_\nu^{(I)} = I_\nu d\omega d\sigma dt d\nu$$

$$E_\nu^{(II)} = (I_\nu + dI_\nu) d\omega d\sigma dt d\nu$$

$$\Delta E_\nu = E_\nu^{(II)} - E_\nu^{(I)} = dI_\nu d\omega d\sigma dt d\nu$$

$$\Delta E_\nu^{(+)} = j_\nu dm d\omega dt d\nu$$

$$= j_\nu \rho d\sigma ds d\omega dt d\nu.$$

$$\Delta E_\nu^{(-)} = -E_\nu^{(I)} \chi_\nu \rho ds$$

$$= -I_\nu \chi_\nu \rho d\sigma dt d\nu ds.$$

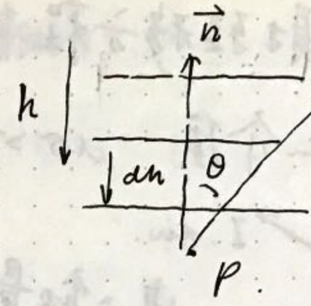
由 $\Delta E_\nu = \Delta E_\nu^{(+)} + \Delta E_\nu^{(-)}$

解得 $\dfrac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu \chi_\nu \rho + j_\nu \rho$. 辐射转移方程.

1) 恒星大气厚度 << 恒星半径. Photosphere Chromosphere

视为平面平行层.

$$dh = -\cos\theta \, ds$$



$$\Rightarrow \quad ds = -\frac{dh}{\cos\theta}$$

代入辐射转移eq.

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{dh} = I_\nu \kappa_\nu \rho - j_\nu \rho$$

两边同除 $\kappa_\nu \rho$. 令 $\rho \kappa_\nu dh = d\tau_\nu$. $S_\nu = j_\nu / \kappa_\nu$

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$ 平面平行层大气中

ii) 大气层厚度与半径相当. (Corona et al.)

假设轴对称.

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \theta} \right) I_\nu$$

而与时间有关、辐射场.

$$dI_\nu \, d\sigma \, dt \, d\nu \, d\omega = \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial s} ds + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt\right) d\sigma \, dt \, d\nu \, d\omega$$

$$= \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial s} + \frac{\partial I}{\partial t}\frac{dt}{ds}\right) ds \, d\sigma \, dt \, d\nu \, d\omega.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial I_\nu}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} = -I_\nu \chi_\nu \rho + j_\nu \rho$$

含时的.

光子的 Boltzmann 方程.

与辐射转移方程的一致性.

$f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ 光子分布函数.

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = \left(\frac{df}{dt}\right)_{\text{Collision}}$$

含时　粒子几何空间　外力作用.

$$F_i = \frac{\partial p_i}{\partial t}$$

Vector $\frac{\partial f}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)f+(\vec{F}\cdot\nabla)f=\left(\frac{df}{dt}\right)_{Collision}$

对光子气体，静止质量为0. Regardless of GR effect.

$\vec{F}=0$　光子速度不变 $\vec{v}=c\vec{l}$

$\Rightarrow$

光子分布函数 $I_\nu=h\nu c f_R(\vec{r},\vec{v},t)$.

光子间相互作用在恒星大气中忽略不计（但在高能 γ 射线中不能忽略 $\gamma+\gamma\to e^-+e^+$）.

故碰撞项是光子与物质间的相互作用.

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{Collision}=\frac{j_\nu\rho-I_\nu\kappa_\nu\rho}{h\nu}$$

Boltzmann 方程可写为

$$(ch\nu)^{-1}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+(ch\nu)^{-1}c(\vec{l}\cdot\nabla)I_\nu=(h\nu)^{-1}(j_\nu\rho-I_\nu\kappa_\nu\rho)$$

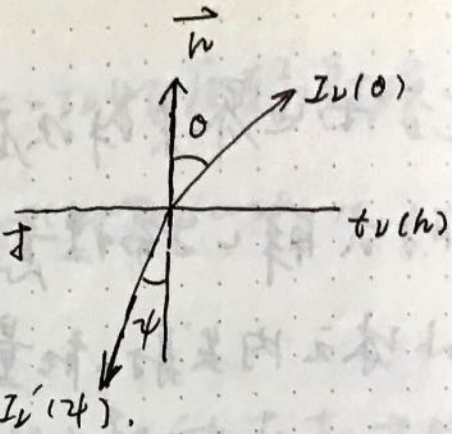
$$\Rightarrow\ (\vec{l}\cdot\nabla)I_\nu+\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}=-I_\nu\kappa_\nu\rho+j_\nu\rho.$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial I_\nu}{\partial s}+\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}=-I_\nu\kappa_\nu\rho+j_\nu\rho.$$

辐射转移方程的解.
（平行层）

向内辐射 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 向外辐射

$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 分开处理.



向外辐射 $I_\nu(\theta,\tau_\nu)$，$\cos\theta>0$.

向内辐射 $I_\nu'(\psi,\tau_\nu)$，$\psi=\pi-\theta$.

分离成两个方程.

$$\cos\theta\,\frac{dI_\nu(\theta,\tau_\nu)}{d\tau_\nu}=I_\nu(\theta,\tau_\nu)-S_\nu$$

$$\cos\psi\,\frac{dI_\nu'(\psi,\tau_\nu)}{d\tau_\nu}=-I_\nu'(\psi,\tau_\nu)+S_\nu$$

向外 $\frac{dI_\nu(\theta,\tau_\nu)}{d\tau_\nu}-I_\nu(\theta,\tau_\nu)/\cos\theta+S_\nu/\cos\theta=0$.

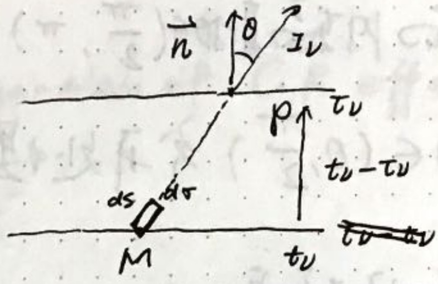
用分部积分化为 $dY/dx+B(x)=0$ 的形式.

向外辐射，上限 $x\to\infty$. 起点 $\tau_{\nu 0}=0$.

$$I_\nu(\theta,\tau_\nu)=C_\nu e^{\tau_\nu \cancel{\sin\theta}/\cos\theta}+\int_{\tau_\nu}^{\infty}S_\nu e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\theta}\,dt_\nu$$

C_ν 由边界条件决定；在介质表面上 $\tau_\nu=0$

形式解的物理意义.



小体元内发射的能量.

$j_\nu\, dm\, dt\, d\omega\, \cancel{d\sigma}\, d\nu$

$= j_\nu \rho\, d\sigma\, dt\, d\omega\, d\nu$

$= \kappa_\nu S_\nu \rho\, d\sigma\, dt\, d\omega\, d\nu$

由 M ↦ P 过程中逐渐~~衰减~~被吸收.

$\to \kappa_\nu S_\nu \rho\, d\sigma\, ds\, dt\, d\omega\, d\nu\, e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\theta}$.

$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho\, dh = -\kappa_\nu \rho \cos\theta\, ds$.

$\circ\ S_\nu(\kappa_\nu \rho\, ds \cos\theta)$

延长线上各点都有相同形式. 总贡献 → 积分

$$d\sigma\, dt\, d\omega\, d\nu \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\theta} / \cos\theta\, dt_\nu$$

故 $\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\theta} / \cos\theta\, dt_\nu$

是 $t_\nu > \tau_\nu$ 所有物质层的发射辐射在 τ_ν 上的叠加

第一项 $C_\nu e^{\tau_\nu/\cos\theta}$ 表示非 $t_\nu > \tau_\nu$ 物质辐射项.

写作 $= \lim\limits_{t_\nu\to\infty} e^{t_\nu/\cos\theta} e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\theta}$.

↓

由于所有介质已经考察. 故只能放在 $t_\nu\to\infty$ 处.

无在 $t_\nu\to\infty$ 处. 有无穷大辐射 $\lim\limits_{t_\nu\to\infty} C_\nu e^{t_\nu/\cos\theta}$.

在恒星内部没有这样的发光面. $C_\nu = 0$

故在恒星大气中 $I_\nu(\theta,\tau_\nu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\theta} / \cos\theta\, dt_\nu$

同样地. 对向内辐射.

$$I_\nu'(\psi,\tau_\nu) = D_\nu e^{-\tau_\nu/\cos\psi} + \underbrace{\int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\psi}/\cos\psi\, dt_\nu}$$

↓ 从在 $t_\nu=0$ 之处的穿入在 τ_ν 处的辐射.

↓ $t_\nu<\tau_\nu$ 发射的在 τ_ν 的叠加

除密近双星(行星、吸积盘)外 $D_\nu = 0$.

↓ 受主星照射　↓ 受晃照射 (外界照射不能忽略).

$S_\nu \sim \tau_\nu$？是否需要 j_ν 与 S_ν？

局部热动平衡假设.

绝热. 封闭辐射场平衡时.

1. 各点 T 相同.

2 热辐射强度场均且各向同性.

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

3. $j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \leftarrow$ 平衡.

4. 电子速度分布. 原子激发与电离. ~T.

由 Maxwell Distribution / Boltzmann Eq1.

Saha Eq 描述.

引入温度 T. 描述局部性质

Local Thermodynamics Equilibrium, LTE.

1. 每个 p ~ T.

2. P 点领域小体元像绝热封闭在温度 T 的系统中

3. 对小体元. LTE 准确成立.

LTE 下 $S_\nu = \dfrac{j_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T)$（各向同性）.

$$I_\nu(\theta,\tau_\nu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\cos\theta}/\cos\theta \, dt_\nu$$

$\downarrow$

依然是形式解 $B_\nu \sim T \sim t_\nu$.

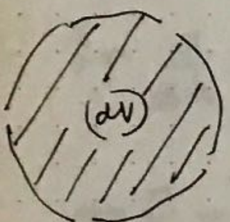
只知道光深也不够，还希望知道和几何厚度间的关系.

源函数可以是任意形式的，和辐射机制有关.

$T \sim t_\nu \sim h$?

光球内体元 $\Leftrightarrow$ 周围介质.

认为 $E_- = E_+$ 能量平衡条件.



能量转移依靠光子（辐射场，对流，热传导）.

忽略

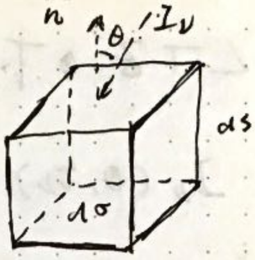
热传导只有在TK明显.

$\Downarrow$

辐射平衡

$$dE_- = j_\nu \, d\omega \, dV \, d\nu.$$

$$E_- = dV \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} j_\nu \, d\omega.$$



$I_\nu (\cos\theta d\sigma) d\omega d\nu$.

穿入体元后被吸收.

$dE_+ = I_\nu (\cos\theta d\sigma) d\omega d\nu \, \kappa_\nu \rho \, ds/\cos\theta$.

$= I_\nu \kappa_\nu \rho \, d\sigma ds d\omega d\nu$.

$= I_\nu \kappa_\nu \, dm d\omega d\nu$.

$E_+ = dm \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} I_\nu \kappa_\nu d\omega$.

由 $E_- = E_+$. 得

$\cancel{\int_{4\pi} I_\nu \kappa_\nu d\omega =} \int_{4\pi} j_\nu d\omega = \int_{4\pi} \kappa_\nu S_\nu d\omega$.

(强磁场?) $= \int_{4\pi} \kappa_\nu B_\nu d\omega$.

在 LTE 下, 非极化. κ_ν 各向同性. B_ν 也各向同性

故

$\cancel{\int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} j_\nu d\omega =} \int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu I_\nu d\nu$.

辐射平衡下的转移方程

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{dh} = I_\nu \chi_\nu \rho - j_\nu \rho .$$

两边乘 $d\omega\, d\nu$ 对全频率立体角积分。

$$\frac{d}{dh}\iint I_\nu \cos\theta\, d\omega\, d\nu = \rho\left(\iint I_\nu \chi_\nu\, d\omega\, d\nu - \iint j_\nu\, d\omega\, d\nu\right)$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \text{ (平衡)}.$$

考虑总辐射流 $\pi F = \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta\, d\omega$.

即 $\frac{d}{dh}(\pi F) = 0$.

$\pi F = const$.

（条件：辐射平衡，平面平行层，LTE）

必须是全频率，（光致电离会改变频率）

单色光，非平行层大气不满足。

考虑辐射压：

对转移方程两边乘 $\cos\theta d\omega/c$，对立体角积分。

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dn}\int_{4\pi} I_\nu \cos^2\theta d\omega = \frac{1}{c}\int_{4\pi}(I_\nu \chi_\nu \rho - j_\nu \rho)\cos\theta d\omega$$

$$\overset{\text{各向同性}}{=\!=\!=} \frac{\chi_\nu \rho}{c}\int_{4\pi}(I_\nu - \underset{B_\nu \text{(各向同性)}}{\overset{\shortparallel}{S_\nu}})\cos\theta d\omega$$

$$= \frac{\chi_\nu \rho}{c}\int_{4\pi} I_\nu \cos\theta d\omega = \frac{\chi_\nu \rho}{c}\pi F_\nu .$$

由于 $p_{R,\nu} = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\nu \cos^2\theta d\omega$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dn}p_{R,\nu} = \frac{\pi}{c}\chi_\nu \rho F_\nu .$$

Def: $$\bar{\chi} = \frac{\int_0^\infty \chi_\nu F_\nu d\nu}{\int_0^\infty F_\nu d\nu} = \frac{1}{F}\int_0^\infty \chi_\nu F_\nu d\nu .$$

两边对全频率积分。

$$\frac{d}{dn}p_R = \frac{\pi}{c}\rho\bar{\chi}F .$$

两边同除 $\bar{\chi}\rho$.

$$\frac{d}{d(\bar{\chi}\rho dh)} p_R = \frac{\pi}{c} F.$$

Def $d\bar{\tau} = \bar{\chi}\rho dh$.（对$\nu$的平均）

$$\frac{d}{d\bar{\tau}_\nu} p_R = \frac{\pi}{c} F$$

▽ p_R 是压力. 是随几何深度变化的.

温度随深度的分布?

χ_ν 由什么机制确定. $\chi_\nu \sim \nu$.

若 χ_ν 与 ν 无关（灰大气）. 一级近似.（数值解的初值解）

试探性研究.

$d\tau_\nu = \chi_\nu \rho dh \Rightarrow d\tau = \chi \rho dh$.

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau} = I_\nu(\theta, \tau) - B_\nu(T).$$ 对ν积分

$$\cos\theta \frac{dI(\theta,\tau)}{d\tau} = I(\theta, \tau) - B(T).$$

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu.$$

辐射平衡 $\int_0^\infty B_\nu \, d\nu = \int_0^\infty J_\nu \, d\nu \equiv J(\tau)$.

$$\begin{array}{c} \parallel \\ B(T) \end{array}$$

(Stefan-Boltzmann)

$$S = \int_0^\infty S_\nu \, d\nu = \int_0^\infty B_\nu(T) \, d\nu = B(T) = J(\tau).$$

故有 $\cos\theta \dfrac{dI(\theta,\tau)}{d\tau} = I(\theta,\tau) - J(\tau)$.

$J(\tau)$ 中包含了 $I(\theta,\tau)$ 对 θ 的积分.

Eddington 近似. 引入三个参量.

$J = \dfrac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\theta)\,d\omega$. 总平均辐射强度.

$H = \dfrac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\theta)\cos\theta\,d\omega$. $H = \dfrac{\pi F}{4\pi} = \dfrac{F}{4}$

$K = \dfrac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\theta)\cos^2\theta\,d\omega$. $K = \cancel{\dfrac{c}{4\pi}\dfrac{1}{c}\int_{4\pi}} \dfrac{c}{4\pi} P_R$.

用 $\cos\theta\,d\omega/4\pi$ 乘两边~~积分~~ 对立体角积分. $J(\tau)$ 与 (θ,φ) 无关.

$$\int_{4\pi} \frac{\cos^2\theta}{4\pi}\frac{d(\theta,\tau)}{d\tau}\,d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\theta,\tau)\cos\theta\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} \underset{\overset{\parallel}{0}}{J(\tau)\cos\theta\,d\omega}$$

有 $\frac{dK}{d\tau} = H = \frac{F}{4}$.

而 πF 与 h 无关. 故与 τ 无关.

$K = H\tau + C$.

引入第一级近似(随方向变化缓慢).

* 用两项式替积分

最低近似

$I(\theta) = I(\theta_1) + A_1(\theta_0 - \theta_1) + \cdots \approx I_1 \approx \frac{1}{2\pi}\int_1 I(\theta)d\omega$ 向外

$I(\theta) = I(\theta_2) + A_2(\theta_0 - \theta_2) + \cdots \approx I_2 \approx \frac{1}{2\pi}\int_2 I(\theta)d\omega$ 向内.

$J = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$.

$H = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\theta)\cos\theta\, d\omega = \frac{1}{4}(I_1 - I_2)$.

$K = \frac{1}{3}J$.

外边界条件. $\tau = 0$, $I_2(\tau = 0) = 0$ (无外光源).

$H = \frac{1}{4}I_1$ $J = \frac{1}{2}I_1 = 2H$ $K = C = \frac{2}{3}H$.

故 $K = H\tau + \frac{2}{3}H \Rightarrow J = H(3\tau + 2)$.

由 Stefan-Boltzmann Eq.

$$\pi B = \sigma T^4$$

Def 辐射有效温度 $\sigma T_{eff} = \pi F = \pi B_{eff}$.

由 $B = J$, $H = \frac{F}{4}$

$$B = J = H(3\tau + 2) = \frac{F}{4}(3\tau + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{1}{4}\frac{\sigma}{\pi} T_{eff}^4 (3\tau + 2).$$

$$\Rightarrow T^4 = \frac{1}{4} T_{eff}^4 (3\tau + 2)$$.（说明偏离黑体）.

$\tau = 0$. 大气表面.

$$T_0^4 = \frac{1}{2} T_{eff} \Rightarrow T_0 = 0.841 T_{eff}.$$

$$\tau = \frac{2}{3}. \quad T = T_{eff}$$

故 $\tau = 2/3$ 是有效层.（对应温度和有效温度相等）

$$I_1 = H(4 + 3\tau)$$

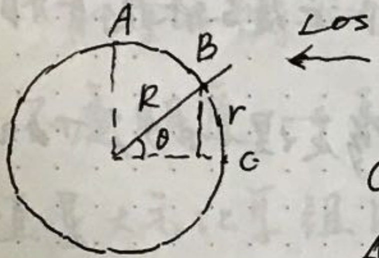
$$I_2 = 3H\tau$$

灰大气. 总辐射强度. 总的量.

对单色完全相应的 J_ν、K_ν、H_ν.

临边昏暗.

日面亮度不均匀. $I_{limb} \approx 40\% I_{disk}$.



C: $I_\nu(0,\overset{\tau}{0})$

A: $I_\nu(\frac{\pi}{2},0)$

$\sin\theta = r/R$. 求 $I_\nu(\theta,0)\sim\theta$.

灰大气情况下. 向外辐射转移方程形式解.

$$I_\nu(\theta,\tau)=\int_\tau^\infty B_\nu e^{-(t-\tau)/\cos\theta}/\cos\theta \, dt$$

太阳表面 $\tau=0$.

$$I_\nu(\theta,0)=\int_0^\infty B_\nu e^{-t/\cos\theta}/\cos\theta \, dt$$

$$= \frac{\int_0^\infty B_\nu e^{-t/\cos\theta}/\cos\theta \, dt}{\int_0^\infty e^{-t/\cos\theta}/\cos\theta \, dt}$$

理解成 B_ν 的某种加权平均.

$t/\cos\theta$ 越小. 权重越大. 当 $t/\cos\theta$ 增大到某一数值.

权重 $\rightarrow 0$.

对~~t~~相 $t/\cos\theta$ 相同情形下。
θ 越大，辐射只能来自较小光深层，从较深位置出来的辐射无法到达表面。

故 $\theta\uparrow$ $I_\nu(\theta,0)\downarrow$（光球内层部温度与深度正相关，越深辐射越强）。由 Wien 位移定理 对 $\theta\uparrow$ $T\downarrow$ $\lambda_{max}\uparrow$

定量研究，取灰大气，对 ν 积分

$$I=\int_0^\infty Be^{-t/\cos\theta}/\cos\theta\, dt$$

Eddington 近似下 $B=\frac{F}{4}(2+3\tau)$

$$I=\frac{F}{2}\left(1+\frac{3}{2}\cos\theta\right)$$

而 $I(0,0)=\frac{F}{2}\left(1+\frac{3}{2}\cos 0^\circ\right)=\frac{F}{2}\cdot\frac{2}{5}$

$$I(\theta,0)=\cancel{I(\theta)}\ I(0,0)\left(1-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cos\theta\right)$$

$$I\left(\frac{\pi}{2},0\right)\approx 0.4\, I(0,0)$$

§2. 恒星大气的不透明度

O. B. A. F. G. K. M.

一定减弱的连续谱与吸收线，明显偏离黑体

Brown Dwarf，全吸收 （宇宙再电离）

类星体：宽发射线；高红移，短于Ly系限全部吸收

① 较宽的范围内连续的辐射减弱：连续吸收

② 谱线范围内：线吸收

能量平衡 → 连续吸收

不透明度 → 辐射吸收能力 ~ χ_ν

恒星大气化学组成

大多数与太阳类似

反常：晚型星 MO 和 K–N 中 C、O 异常

WR 星（大质量）C–O 支、N 支的化学组成差异

矮星系（重金属少、第一代恒星？）

考虑相对化学组成：

单位体元内原子数 $N_1, N_2, \ldots$

def $a_s = \dfrac{N_s}{N_1}$ 为相对含量（一般 N_1 取氢）

$$\alpha_s = \frac{N_s m_s}{N_1 m_1}$$

一般以太阳为标准（初始）

取 $\log a_s + 12$

原子结构和能级

电子状态 (n, l, m_l, m_s)

$n = 1, 2, \cdots$

$l = 0, \ldots, n-1$

$m_l = -l, \ldots, l$

$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

简并度 $\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$ → 能级统计权重、

类氢原子，不考虑 fine-structure

$$E_n = -R_H hc \frac{Z^2}{n^2}$$

碱金属原子

考虑原子实，总轨道角动量、自旋角动量都为0

需要考虑原子实的极化与电子之穿透效应

n相同，l不同的能级不再简并

(n, l, j, m_j) 外场不存在 (n, l, j)

简并度 $2j+1$

多电子原子

$(n_1 l_1, n_2 l_2, \ldots)$ 价电子之间也存在相互作用

LS耦合与jj耦合

LS 耦合（大多数原子）

自旋相互作用强，轨道相互作用强。

~~总之~~ $\hat{L}=\hat{L}_1+\hat{L}_2$ $S=\hat{S}_1+\hat{S}_2$

$\hat{J}=\hat{L}+\hat{S}$

能级简并 $2J+1$

jj 耦合（高激发态较重原子）

电子自身轨道运动与自旋相互作用强

$\hat{j}_1=\hat{l}_1+\hat{s}_1$ $\hat{j}_2=\hat{l}_2+\hat{s}_2$

$\hat{J}=\hat{j}_1+\hat{j}_2$

${}^{2S+1}L_J$ 统计权重 $2J+1$

最低能态 — 基态

H $1s\ {}^2S_{1/2}$

Na $3s\ {}^2S_{1/2}$

光致激发，非弹性碰撞激发

高能态与低能态碰撞而不辐射，碰撞降(退)激发

电子从束缚态变为自由态 → 电离 ionaization

自由粒子 + 自由电子 → 复合 Recombination

Recombination 一次 电离级下降一次

中性铁 Fe I 一次电离铁 Fe II

基态电离最小能量 → 电离电势 χ_r

基态 + χ_0 → 电离一次

$\varepsilon_{r,k}$ r次电离原子的k能级激发电势

$$\chi_r = \chi_{r,k} + \varepsilon_{r,k}$$

$$h\nu = \chi_r + \frac{1}{2}mv^2$$

描写原子激发 — Boltzmann公式

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{-(\varepsilon_k - \varepsilon_i)\beta}$$

对同一电离级

$$\frac{N_{r,k}}{N_{r,i}} = \frac{g_{r,k}}{g_{r,i}} e^{-(\varepsilon_{r,k} - \varepsilon_{r,i})\beta}$$

$$\lg \frac{N_{r,k}}{N_{r,i}} = \lg \frac{g_{r,k}}{g_{r,i}} - (\varepsilon_{r,k} - \varepsilon_{r,i}) \frac{1}{T} \frac{\lg e}{k_B}$$

以eV为单位

$$= \lg \frac{g_{r,k}}{g_{r,i}} - (\varepsilon_{r,k} - \varepsilon_{r,i}) \frac{5040}{T}.$$

1eV ~ inf~~rared~~rad

$$N_r = \sum_i N_{r,i} = N_{r,1} \sum_i \frac{N_{r,i}}{N_{r,1}} = \frac{N_{r,1}}{g_{r,1}} \left(g_{r,1} + g_{r,2} e^{-\varepsilon_{r,2}\beta} + \dots \right)$$

Partition Function.

$$u_r(T) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{r,i} e^{-\varepsilon_{r,i}\beta}.$$

$$N_r = \frac{N_{r,1}}{g_{r,1}} u_r(T).$$

$g_{r,1} \rightarrow (2j+1)$

$$\Rightarrow N_{r,i} = \frac{g_{r,i} N_r}{u_r(T)} e^{-\varepsilon_{r,i}\beta}.$$

谱线强度 吸收线强度

Saha Eq.

Boltzmann Eq 不能处理已经电离或各个电离级之间的关系.

电离原子视为中性原子的连续态.

电子能量 $\varepsilon = \chi_0 + \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$.

$g_c = g_{1,1}$ (态密度)

$$\sum \rightarrow \int g_0 \frac{dp_x dp_y dp_z \, dx dy dz}{h^3}.$$

连续态原子 $\Longleftrightarrow$ 自由电子.

$$\frac{dN_e}{dN_0} = \frac{(g_e N_0/u_0)}{(g_{0,1} N_0/u_0)} e^{-\varepsilon/k_BT} = \frac{2g_{1,1}}{g_{0,1}} e^{-\chi_0/k_BT} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} \frac{d^3q\, d^3p}{h^3}$$

对全空间积分

$$\frac{N_e}{N_0} = \frac{2g_{1,1}}{g_{0,1}} \frac{V_0}{h^3} e^{-\chi_0\beta} \int e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} p^2 \cancel{d\theta} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dp.$$

$$= \frac{2g_{1,1}}{g_{0,1}} \frac{4\pi V_0}{h^3} e^{-\chi_0\beta} \int e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} p^2 dp.$$

$$= \frac{2g_{1,1}}{g_{0,1}} \frac{(2\pi m_e k_BT)^{3/2}}{h^3} V_0 e^{-\chi_0/k_BT}$$

代入 $V_0 = \frac{1}{N_{1,1}}$

有 $$\frac{N_{1,1}}{N_{0,1}} N_e = \frac{2g_{1,1}}{g_{0,1}} \frac{(2\pi m_e k_BT)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_0/k_BT}.$$

代入 $N_{r,1} = \frac{g_{r,1} N_r}{u_r(T)}$

有 $$\frac{N_1}{N_0} N_e = \frac{2u_1(T)}{u_0(T)} \left(\frac{2\pi m_e k_BT}{h^3}\right)^{3/2} e^{-\chi_0/k_BT}$$

其中 $N_1=\sum_i N_{1,i}$ $N_0=\sum_i N_{0,i}$.

利用 $p_e=N_e k_B T$.

$$\frac{N_1}{N_0}p_e=\frac{2u_1(T)}{u_0(T)}\frac{(2\pi m)^{3/2}(k_BT)^{5/2}}{h^3}e^{-\chi_0/k_BT}.$$

同样适用于 $r\to r+1$ 级电离的情况.

$$\frac{N_{r+1}}{N_r}p_e=K_r(T).$$

当 $-\chi_0/k_BT\ll1$ 时. 即 T 很大时. 由 $(k_BT)^{5/2}$ 决定

原子的电离程度随温度上升而上升.

T=const —— - - - - . 与 p_e 成反比.

为数值计算方便 (0.48)

$$\lg\frac{N_{r+1}}{N_r}=\lg\frac{2u_{r+1}(T)}{u_r(T)}+\frac{5}{2}\lg T-\frac{5040}{T}\chi_r-\lg p_e-\lg\frac{(2\pi m)^{3/2}k^{5/2}}{h^3}$$

Partition Function 收敛很快. 可截断

只有 $\varepsilon_{r,i}\le k_BT$ 的激发态项才值得考虑.

$\varepsilon_{r,i}\le 2eV$ $T>10^4K$.

电离度 $x_r=\dfrac{N_r}{N_0+N_1+\cdots}$

由于电离级差别较大. 一般考虑 $N=N_r+N_{r+1}$.

r 级次电离原子电离度 $x_{r+1}=\dfrac{N_{r+1}}{N_r+N_{r+1}}$ 故有 $\dfrac{x_{r+1}}{1-x_{r+1}}p_e=K_r(T)$

原子跃迁概率系数 自发跃迁

$\nu_{ki} = \varepsilon_{ki}/h$

低能级原子吸收 ν_{ki} 的光量子受激跃迁

高能级原子受 ν_{ki} 的光子诱导放出 ν_{ki} 光子

无外场，单位时间一个原子由 $k \to i$ 在 $d\omega$ 放出一个光量子概率为

$A_{ki}\frac{d\omega}{4\pi}$

受激发射，在一个强度为 I_ν 的辐射场作用下，单位时间内一个原子由 $k \to i$ 在 $d\omega$ 发射 ν_{ki} 光子的概率为

$$B_{ki} = B_{ki} I_\nu \, d\omega/4\pi.$$

受激吸收

$$B_{ik} = B_{ik} I_\nu \, d\omega/4\pi.$$

$$n_{ki} = N_k (A_{ki} + B_{ki} I_\nu) d\omega/4\pi.$$

$$n_{ik} = N_i B_{ik} I_\nu \, d\omega/4\pi.$$

热动平衡下 $n_{ki} = n_{ik}$，否则会出现 emission line / absorbtion line.

(细致)

$$N_k (A_{ki} + B_{ki} I_\nu) = N_i B_{ik} I_\nu.$$

$$A_{ki} + B_{ki} I_\nu = \frac{N_i}{N_k} B_{ik} I_\nu.$$

由Boltzmann分布

$$(A_{ki}+B_{ki}I_\nu)=\frac{g_i}{g_k}e^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_k)\beta}B_{ik}I_\nu$$

$$\Rightarrow I_\nu=\frac{A_{ki}/B_{ki}}{\frac{g_i}{g_k}\frac{B_{ik}}{B_{ki}}e^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_k)\beta}-1}$$

$T\to\infty$ $\beta\to 0$. I_ν应该$\to\infty$.

故 $\frac{g_i}{g_k}\frac{B_{ik}}{B_{ki}}=1$.

$$\Rightarrow g_iB_{ik}=g_kB_{ki}.$$

$$\Rightarrow I_\nu=\frac{A_{ki}}{B_{ki}}\cdot\frac{1}{e^{-(\varepsilon_i-\varepsilon_k)\beta}-1}$$

而 $I_\nu=B_\nu(T)$.

$$\Rightarrow\frac{A_{ki}}{B_{ki}}=\frac{2h\nu^3}{c^2}.$$

即 $A_{ki}=\frac{2h\nu^3}{c^2}B_{ki}$

若B_{ki}由u来定义.还要多乘$\frac{4\pi}{c}$

* 虽然是在TE条件下得到上式..但在NTE下依然成立（原子固有性质）.

* 对非简并态（单态）依然成立.

自发发射应该是各向同性的.

受激发射/吸收依赖于外场. 不是各向同性的.

把各向同性. 异性分开处理.

$$n_{ik}^* = (N_i B_{ik} - N_k B_{ki}) I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}.$$

$$= N_i B_{ik} I_\nu \left(1 - \frac{N_k}{N_i}\frac{B_{ki}}{B_{ik}}\right)\frac{d\omega}{4\pi}.$$

$$\overset{LTE}{=} N_i B_{ik} I_\nu \left(1 - \frac{N_k}{N_i}\frac{g_i}{g_k}\right)\frac{d\omega}{4\pi}$$

$$\frac{n_{ik}^*}{n_{ik}} = 1 - \frac{N_k}{N_i}\frac{g_i}{g_k}$$

$$= 1 - \frac{g_k}{g_i} e^{-(\varepsilon_k - \varepsilon_i)\beta} \frac{g_i}{g_k}$$

$$= 1 - e^{-h\nu_{ik}\beta}.$$

吸收与负吸收的重要性由 $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$

紫外区 $\frac{h\nu}{k_B T} >> 1$. $\frac{n_{ik}^*}{n_{ik}} \approx 1$. 可忽略负吸收.

far infrared / micro-wave 负吸收相当重要.

连续吸收的来源

光致电离

自由电子的自由→自由跃迁

(从一个自由能量→另一个自由能量)

分子的离解、电离、分子带的吸收

自由电子 Thomson scattering / 原子的 Rayleigh Scattering

尘埃的吸收和散射

光致电离

吸收 $\nu \geq \chi_{r,k}/h$ 的所有光子

连续吸收带、带头频率 $\nu_k = \chi_{r,k}/h$、无穷多个的离频

短波延伸 $\chi_{r,k} \downarrow$ 带越长

H 为例子 Lymann Series $\lambda < 912Å$

Balmer Series $\lambda < 3646Å$

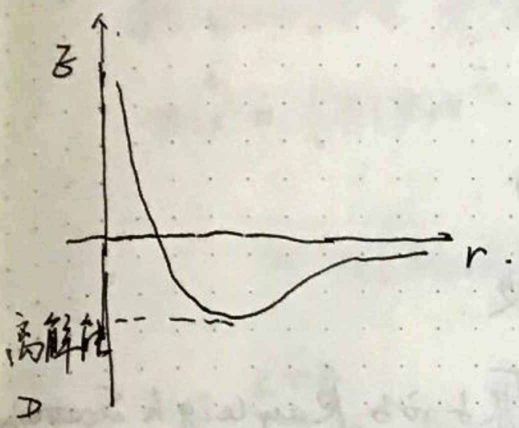
Paeshen Series $\lambda < 8206Å$

可见光区 $n \geq 3$

UV. XR 区域需全部考虑

自由－自由跃迁，任意ν.

分子的吸收，散射.



分子带吸收

$E = E_e + E_\nu + E_r$.

$\Delta E = \Delta E_e + \Delta E_\nu + \Delta E_r$.

Visibel / UV. near-infrared. Far-~~Infrad~~ Infrared. nm-wave. cm-wave CO分子?

⇒ 一系列叠加在ΔE_e上的密集谱线 ⇒ 光谱带.

free-electron ～ Thomson Scattering.

能够散射任意频率

Hydrogen ～ Rayleigh Scattering.

UV.

尘埃 ∠~λ. 次波源. 复折射率（介电~~吸收~~常数）

真吸收和散射.

辐射能 → 热能 → 其他频率 任意方向的辐射.

如光致电离. 光子数不守恒

还有自由-自由跃迁.

散射.

不把辐射能转变为热能. 光子数守恒. 改变辐射方向.

分子离解与电离是真吸收过程.

真吸收在LTE下. 满足 Kirchoff Theorem.

散射不满足.

原子吸收系数（微观）.

$$dI_\nu^{(s)} = -I_\nu \kappa_\nu^{(s)} \rho_s \, dh = -I_\nu \kappa_\nu^{(s)} m_s N_s \, dh$$

引入 $k_\nu^{(s)} = \kappa_\nu^{(s)} m_s$

则 $dI_\nu^{(s)} = -I_\nu k_\nu^{(s)} N_s \, dh$.

$$k_\nu^{(s)} = \frac{-dI_\nu^{(s)}}{I_\nu N_s \, dh}$$ 以一个原子计算的吸收系数

↳ 单位是面积. 与散射截面同量纲.

核电荷数Z的类氢原子（电离 r = Z-1 次）

吸收 $\nu \geq \nu_n$，发射电离。

量子力学给出，$(k_\nu')_{r,n} = \frac{32\pi^2 e^6 R_\infty Z^4 g_n'}{3\sqrt{3} h^3 n^5}\nu^{-3}$

g_n' ~ Gaunt Factor Quantum correction.

$$g_n' = 1 - 0.1728 \left(\frac{\nu}{cR_\infty Z^2}\right)^{1/3}\left(\frac{2cR_\infty Z^2}{n^2\nu} - 1\right) \sim 1.$$

$(k_\nu')_{r,n}$ 随 $\nu\uparrow$ 而急剧减小。

类氢原子在任一~~光谱~~频率上之吸收

$$dI_\nu = -I_\nu N_{r,1}(k_\nu')_{bf}\,dh = \left(I_\nu \sum_{n=n_0}^{\infty}(k_\nu')_{r,n}N_{r,n}\,dh\right).$$

把所有能态都算到基态上了。

$$(k_\nu')_{bf} = \frac{\sum_{n=n_0}^{\infty}(k_\nu')_{r,n}N_{r,n}}{N_{r,1}}.$$

$$\nu_{n_0} = \chi_{n_0}/h < \nu < \nu_{n_0-1} = \chi_{n_0-1}/h.$$

在LTE假设下 $\frac{N_{r,n}}{N_{r,1}} = \frac{g_{r,n}}{g_{r,1}}e^{-\varepsilon_{r,n}/KBT}$ $\underline{\underline{\text{类氢原子}}}$ $\frac{2n^2}{2}e^{-\varepsilon_{r,n}/KBT}$

$$= n^2 e^{-\varepsilon_{r,n}/KBT}.$$

得 $(k_\nu')_{bf} = \frac{32\pi^2 e^6 k_\infty Z^4}{3\sqrt{3}h^3\nu^3}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{g_n'}{n^3}e^{-\varepsilon_{r,n}/KBT}.$

$\varepsilon_{r,n} = \chi_r - \chi_{r,n} = h\nu_1 - h\nu_n$.

令 $u_1 = \frac{h\nu_1}{K_B T}$ $u_2 = \frac{h\nu_2}{K_B T}$.

$\frac{\varepsilon_{r,n}}{K_B T} = u_1 - u_n$.

$$(k_\nu')_{bf} = \frac{32\pi^2 e^6 R_\infty Z^4}{3\sqrt{3}\, h^3 \nu^3} e^{-u_1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g_n'}{n^3} e^{u_n}.$$

式 × R_∞. 有

$$(k_\nu')_{bf} = \frac{64\pi^4 e^{10} m_e Z^4}{3\sqrt{3}\, c h^3 k_B^3 T^3} \frac{1}{u^3} e^{-u_1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g_n'}{n^3} e^{u_n}$$

$u = \frac{h\nu}{K_B T}$

$\rightarrow \varepsilon_n \sim \frac{1}{n^2}$

有限求和 + 积分 $\Delta\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^3}$.

前4项? $g_n' \approx 1$.

$$= \sum_{u_n < u}^{u=4} \frac{e^{u_n}}{n^3} - \frac{1}{2}\int_5^{\infty} e^{u_n}\, d\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{u_n < u}^{u=4} \frac{e^{u_n}}{n^3} - \frac{1}{2}\int_5^{\infty} e^{u_n}\, d\left(\frac{u_n}{u_1}\right)$$

$$= \sum_{u_n < u}^{u=4} \frac{e^{u_n}}{n^3} + \frac{1}{2u_1}\left(e^{u_5} - 1\right).$$

以 $r+1$ 次电离原子计算.

$dI_\nu = -I_\nu N_{r+1} (k_\nu')_{b-f}\, dh$ $\left(-I_\nu N_{r+1} (k_\nu')_{bf}\, dh\right.$

$$(k_\nu')_{b-f} = (k_\nu')_{bf}\frac{N_{r,1}}{N_{r+1}}$$

由Saha Eq.

$$\frac{N_{r+1}}{N_r}p_e = \frac{2u_{r+1}(T)}{u_r(T)}\frac{(2\pi m_e)^{3/2}(k_BT)^{5/2}}{h^3}e^{-\chi_r/k_BT}.$$

Boltzmann Eq. $N_r = \frac{N_{r,1}}{g_{r,1}}u_r(T)$.

$u_{r+1}=1$ (裸原子).

$$\Downarrow$$

$$(k_\nu')_{b-f} = p_e\frac{C_0Z^2T^{-3/2}}{\nu^3}\left[\frac{2hcR_\infty Z^2}{k_BT}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{g_n'}{n^3}e^{\frac{hcR_\infty Z^2}{n^2k_BT}}\right]$$

以一个r+1次电离原子计算类氢原子自由一自由跃迁过程.

$$(k_\nu')_{f-f} = \frac{C_0Z^2p_e}{T^{3/2}\nu^3}g''$$ ← 电子密度表现.

↓非束缚态. 电子能量表现成温度

$$g'' = 1+0.1728\left(\frac{\nu}{cR_\infty Z^2}\right)^{1/3}\left(1+\frac{2k_BT}{h\nu}\right)\sim 1$$

总的吸收的系数.

$$(k_\nu')_{b-f} + (k_\nu')_{f-f}.$$

设r+1次电离原子电离度为 X_{r+1}. 以一个原子计算的吸收系数

$$k_\nu' = X_{r+1}[(k_\nu')_{b-f}+(k_\nu')_{f-f}].$$

把负吸收考虑在内（受激发射）.

$$\frac{n^{*}_{i\to k}}{n_{i-k}} = 1 - e^{-\frac{h\nu_{ik}}{k_B T}}$$

推广到连续态.

$$k_\nu = k_\nu' \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right).$$

相应的质量吸收系数. $-I_\nu \rho \chi_\nu dh = -I_\nu N_Z k_\nu dh$.

$$\chi_\nu = \frac{N_Z}{\rho_Z} k_\nu = \frac{k_\nu}{m_Z}$$

Z元素原子质量.

$$= \chi_{r+1} \frac{C_0 Z^2 p_e}{T^{3/2} \nu^3 m_Z} \left\{ \frac{2hcR_\infty Z^2}{k_B T} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g_n'}{n^3} e^{hcR_\infty Z^2/n^2 k_B T} + g_n'' \right\}$$

$$\left(1 - e^{-h\nu/k_B T}\right)$$

以 LTE 为条件. B、A、F光谱型恒星大气中. 中性氢的吸收起重要作用.

O型星 $T \geq 2\times10^4$ K. 氢高度电离

自由电子散射、中性原子的 Rayleigh 散射。

散射截面 $s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}$.

↳辐射阻尼.

$\omega \gg \omega_0$（自由电子）

$\omega_0 = 0$. , $\gamma \ll \omega$（散射中衰减可忽略）.

⇒ Thomson Scattering.

$$s_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_c^2 = 6.65\times10^{-25}\,cm^2$$

$$\sigma_e = \frac{s_e}{m_p} = 0.40\,cm^2/g.$$

↓

以质量定义的、假设里面是全电离、H.

自由电子可同等散射各个波段.

对束缚电子. $\omega_0 \to$ 束缚能. 低能光子. Rayleigh 散射.

对应 $\omega \ll \omega_0$

$$s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4.$$

中性 H

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 1026\,\mathring{A}.$$

$$S_H = S_e\left(\frac{1026\text{Å}}{\lambda}\right)^4.$$

波长越短、散射概率越大.

适用于 $\lambda >> \lambda_0$.

晚型星(地球)大气中、温度低. Rayleigh 散射比较强.

$S_e \to$ 一个粒子.

$$k_\nu = \frac{S_e N_e}{\rho} = \frac{S_e}{m_p}.$$

散射不是热辐射 (Kirchoff 定律失效)

也不存在负吸收.

负氢离子、其他原子、分子和尘埃的连续吸收

中性 H + 电子

从 $A_0 - F_2$ 型星开始. 直到光谱型更晚的恒星大气中. H^- 的吸收

起重要作用.

主要表现: H 的 Balmer 跳跃 $D = 2.5\lg\frac{F_{3646^+}}{F_{3646^-}}$

从 $B_0 \to A_0$ 增大. (电离增加).

从 A_0 开始, $D\downarrow$ 与 D 随 $T\downarrow$ 而 $\uparrow$ 不同.

B — F

H^- 与 HeI 类似. 核 + $2e^-$

束缚较松散. 易电离. $T > 8000K$. 几乎不存在 (O 型星中无)

$H^- + h\nu = e^- + H$. $\frac{1}{2}m_e v_e^2 = h\nu - 0.75eV$

F-F

$H + e + h\nu = H + e'$

$\frac{1}{2} m_e v_e'^2 = \frac{1}{2} m_e v_e^2 + h\nu$

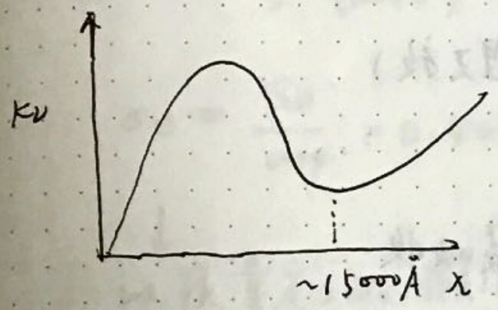
B-F: $0.75\ eV$ 截头波长 $16500\ \text{Å}$

在 8500 Å 有极大吸收.

在 15000 Å 处 B-F 与 F-F 相等.

F-F 吸收系数向长波区增大. 在 infrared 区起作用.

总吸收系数



将 H^- 的贡献等效到 H 上.

需要 $\frac{N(H^-)}{N(H)}$. (LTE, Saha Eq). ~T, pe.

$$\begin{cases} u(H) = 2 \\ u(H^-) = 1 \end{cases}$$

氢的其他离子

H_2^+ { 光致电离. 低温. 外界紫外

中性 H 与电离 H 结合 $n \propto n_H n_p$.

H_2^+ 吸收峰值为 ~1100 Å　H 中 e^- 与 H^+ 作用增加束缚

1100Å 处于Balmer系内. 紫外区有贡献.

$\lambda > 4000$Å, H_2^+吸收作用不如H^-.

对H_2^- (氢分子极化).

$n(H_2^-) \propto n_H n_{H^-}$

相对低的环境. 低结合能.

晚型星. (M型等) 金属提供自由电子.

F-F吸收在红外区比较重要

B-F跃迁可以忽略. (结合能太低).

(LTE下. 束缚态电子少).

H_2^-的F-F吸收比仍然小于H^-在16500Å的极小

He的吸收.

中性He. 电离He. He^-等.

HeII是类氢原子. 由于$k_{b-f} \propto Z^4$. $k_{f-f} \propto Z^2$.

故$k_{b-f}(He^+) = 16 k_{b-f}(H)$ $k_{f-f}(He^+) = 4 k_{f-f}(H)$.

O型星主要吸收源

由于分自旋单态与自旋态. 只能对各个能带分别计算.

连续吸收带头波长504Å. UV区. T～B型星.

基态电离电势.

He^- $2p+3e^-$

B-F 不重要. 结合能低.

F-F 吸收在冷星的长波区重要.

金属原子 → 紫外区.

分子吸收. 离解过程服从 Saha 公式. 晚型星.

密集谱线 ⇒ 吸收带谱.

分子离解. 电离.

尘埃的吸收. (晚型星. AGN).

真吸收. 散射.

$Q_a \sigma_d$, $Q_s \sigma_d$.

几何截面.

与折射率 ν 有关

$$dI_\nu = -I_\nu N_d \sigma_d (Q_a + Q_s) dh.$$

总吸收系数

$$dI_\nu = \sum_s dI_\nu^{(s)} = -I_\nu dh \sum_s N_s k_\nu^{(s)}$$

使用相对含量

$$= -I_\nu dh N_1 \sum_s a_s k_\nu^{(s)}$$

令 $k_\nu = \sum_s a_s k_\nu^{(s)}$.

$$= -I_\nu k_\nu N_1 dh.$$

↳ 所有原子考虑在内. 以一个氢原子计算一有效吸收系数

$$\Rightarrow k_\nu = \frac{\sum_s N_s k_\nu^{(s)}}{\rho} = \frac{N_i k_\nu}{\rho}$$

分子和尘埃块

各种光谱型恒星大气里辐射的吸收

① 光谱区

② 给定光谱区 $k_\nu = \sum_s N_s k_\nu^{(s)} / \rho$ 中的主要成分

⇒ 主要吸收源

分子. K.M.N.R 晚型星.

T 较低；吸收在 Infrared & Optical 可见

H^-. 中性 H 与自由电子.

晚型星有大量中性 H. 但自由电子不足（金属太少）

早 K 型 分子吸收↓ 自由电子↑ H^- 成为主要贡献

太阳(G2V). H^- 的作用是根本性的.

T 再次增高. H^- 离解. H 贡献↑.

A0 中 H^- 作用很小.

White Dwarf n_e 很大 H^- 作用需考虑

H 晚型星中H大多处于基态. Lyman限外υ序 FUV. 忽略⊗

太阳. 紫外.

A0-B2. 中性H贡献明显.

He. 电离电势 24.58eV ~3×10^4K. O型~B2型. 远紫外区.

太阳的远紫外很弱.

中性金属原子. 低电离电势. 晚型星大气中需考虑.

太阳. 紫色. 紫外需考虑.

自由电子散射.

O-B2. T较高 B2-A0它是 Pe↓. 使电离度较高. 能够多提供大量

自由电子.

O-B型星. 主序星中温度最高的恒星 (T≥2.5×10^4K.

M~20-60 M⊙

绝大部分H已电离 HeⅡ也有一部分.

主要是自由电子散射 (与ν无关)

O-B2. (1.1×10^4 ~2.5×10^4K) 中性He的光电吸收.

B2型晚的B型星. H的光电吸收变得重要.

紫外. 金属 B-F. F-F.

A0－F5型星　A0 9800K　F 6000~7300K

A0 中性H起决定性作用．H_2^+ 也起一定作用．

晚A-F H^- 吸收起决定性

A0→晚　H^- 不透明度增加．

F型星　H_2 考虑．

A型：连续吸收＋Hα．Hβ．Hγ．

F5-G型星　F5 6600K　G 5200-6000K．

H^- 不透明度仍占约60%．

分子的吸收仍不明显．

金属、不透明度在紫外区重要

氢H 光电吸收)逐渐减弱(激发态，电离↓)

中性H的 Rayleigh Scattering 在短波不可忽略

(光 Photoionzation↓ Scattering↑)．

K.M晚型星．

K 3500K~5150K．M：T<3800K　$M \sim 0.3M_\odot \approx \overline{M}$

$\frac{dN}{dM_*} \propto M_*^{-\alpha}$　$\alpha \sim 2.37$．initial Mass Function

主要是分子能级跃迁(在红端与红外，不同谱线重叠)

H_2 分子的 Rayleigh Scattering．

分子的离解～红外．

晚型星～尘埃包层．

非灰大气辐射平衡理论的一般解法

辐射平衡 能量平衡

恒星大气的物理结构

$$\cos\theta \frac{dI}{d\tau} = I_\nu - S_\nu$$

真吸收

非灰大气问题的有效方法是逐次近似解

用等价灰大气代替灰大气

构造一个灰大气 引入某种对频率加权的平均吸收系数 $\bar{\chi}$ 来代替

χ_ν、由 $\bar{\chi}$ 定义等效灰大气

$W_\nu(P_e, T)$ 是归一化权重函数

$$\bar{\chi} = \int_0^\infty W_\nu(p_e, T)\, \chi_\nu(p_e, T)\, d\nu$$

Rosseland 平均

引入单色量

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\theta)\, d\omega$$

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\theta)\cos\theta\, d\omega = \frac{1}{4}F_\nu$$

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\theta)\cos^2\theta\, d\omega = \frac{c}{4\pi}P_{R,\nu}$$

类似于 Eddington 近似

以 $\frac{\cos\theta\, d\omega}{4\pi}$ 乘以方程两端

$$\cos\theta \frac{dI_\nu(\theta,\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu - B_\nu$$ 对方向积分

$$\Rightarrow \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu = \frac{1}{4}F_\nu$$

$$\Rightarrow \frac{dK_\nu}{\rho\chi_\nu dh} = \frac{1}{4}F_\nu$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dK_\nu}{dh}d\nu = \frac{\rho}{4}F$$

灰大气 辐射平衡 $\frac{1}{\chi\rho}\frac{dp_R}{dh} = \frac{\pi}{c}F$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\chi\rho}\frac{4\pi}{c}\frac{dK}{dh} = \frac{\pi}{c}F \Rightarrow \frac{1}{\chi}\frac{dK}{dh} = \frac{\rho}{4}F$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\chi}\frac{dK}{dh} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dK_\nu}{dh}d\nu$$

保证等价灰大气与非灰大气总辐射流相同

而 K_ν、χ_ν 都未知？

辐射场近似各向同性 $J_\nu \approx B_\nu$ 平均辐射强度

$$K_\nu = \frac{J_\nu}{3} = \frac{B_\nu}{3}$$

$$\frac{1}{\chi}\frac{dB}{dh} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dB_\nu}{dh}d\nu$$

$$\frac{1}{\chi_R} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}\frac{dT}{dh}d\nu \Big/ \left(\frac{dB}{dT}\frac{dT}{dh}\right)$$

$$\frac{1}{\chi_R} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \Big/ \frac{dB}{dT}.$$

由 planck 函数给出加权函数.

Chandrasekhar 平均

如果实际大气与灰大气偏离不大 即 $\frac{d\chi_\nu}{d\tau} \ll 1$.

$$\bar{\chi}_c = \frac{1}{F} \int_0^\infty \chi_\nu F_\nu^{(1)} d\nu$$

$\downarrow$

待定的等价灰大气单色辐射流.

Eddington 近似给出.

$T^4 = \frac{3}{4} T_{eff}^4 (\tau + \frac{2}{3})$. (辐射分解成向内向外两部分)

按角度平均分成 2n 束. $\cos\theta \frac{dI}{d\tau} = I - J$.

每束光仅是 τ_ν 的函数. I_ν 随方向的变化用多项式展开.

考虑到 $J = \frac{1}{4\pi} \int I d\omega$

Gauss 证明. 只要 2n 个方向 θ_i $(i = 1, \ldots, 2n)$ 满足

$P_{2n}(\cos\theta_i) = 0$. 方向积分 $\Rightarrow$ 求和.

$n \to \infty$ 灰大气的精确解

结论形式与 Eddington 近似相近

$T^4 = \frac{3}{4} T_{eff}^4 (\tau + q(\tau))$ $q(\tau) \in [0.577, 0.7104]$ 且单调.

$$\frac{T}{T_{eff}} = \left\{\frac{3}{4}\left[\tau + q(\tau)\right]\right\}^{1/4} = f(\tau).$$

有了温度分布. LTE假设

$$S_\nu^{(1)}(\tau) = B_\nu^{(1)}(\tau) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left[e^{u/f(\tau)} - 1\right]^{-1}.$$

$$u = \frac{h\nu}{K_B T_{eff}}$$

向外形式解 $I_\nu^{(1)}(\theta,\tau) = \int_\tau^\infty B_\nu^{(1)} e^{-(t-\tau)\sec\theta} \sec\theta \, dt$

$$I_\nu^{\prime(1)}(\psi,\tau) = \int_0^\tau B_\nu^{(1)} e^{-(\tau-t)\sec\theta} \sec\psi \, dt$$

$$F_\nu^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{4\pi} I_\nu^{(1)} \cos\theta \, d\omega$$

$$\xlongequal{轴对称} \frac{2\pi}{\pi}\int_{0\le\theta\le\pi/2} I_\nu^{(1)} \cos\theta\sin\theta \, d\theta - \frac{2\pi}{\pi}\int_{0\le\psi\le\frac{\pi}{2}} I_\nu^{\prime(1)} \cos\psi\sin\psi \, d\psi$$

$$= -2\int_\tau^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} B_\nu^{(1)}(t) e^{-(t-\tau)\sec\theta} d\cos\theta \, dt + 2\int_0^\tau\int_0^{\pi/2} B_\nu^{(1)}(t)$$

$$e^{-(\tau-t)\sec\psi} d\cos\psi \, dt$$

$$\xlongequal{\mu=\cos\theta} 2$$

$$= \Phi_\tau\left\{B_\nu^{(1)}(t)\right\}.$$

$\Phi_\tau\{f(t)\} = 2\int_\tau^\infty f(t) E_2(t-\tau)\,dt - 2\int_0^\tau f(t) E_2(\tau-t)\,dt.$

代回 $\overline{\chi}_c = \frac{1}{F}\int_0^\infty \chi_\nu F^{(1)}_\nu \,d\nu$. 保证总辐射压不变.

planck平均.

以planck函数为归一化权重. 保证发射=吸收.

$$\overline{\chi}_p = \frac{1}{B}\int_0^\infty \chi_\nu B_\nu \,d\nu$$

在得到不同的 $\overline{\chi}$ 后 用 $\overline{\chi}(p_e, T)$ 构造等价灰大气.

$\tau = \int_0^h \overline{\chi}\rho\,dh$. $T\sim h$ 分布由Eddington/Chandrasekhar 给出.

$$\tau_\nu = \int_0^{\tau_\nu} d\tau_\nu = \int_0^h \chi_\nu \rho\,dh = \int_0^h \frac{\chi_\nu}{\overline{\chi}}\overline{\chi}\rho\,dh = \int_0^\tau \frac{\chi_\nu}{\overline{\chi}}\,dt$$

$\chi_\nu/\overline{\chi}$ 是 p_e. T. 和 ν 的函数. 有了 $p_e\sim\tau$.

可得 $\tau\sim\tau_\nu \Rightarrow T\sim\tau_\nu \Rightarrow B_\nu\sim(\tau_\nu)$.

代回形式解得到 $I_\nu^{+}(\theta,\tau_\nu)$, $I_\nu^{-}(\theta,\tau_\nu)$.

$\pi F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta\,d\omega$.

$\pi F = \int_{4\pi} F_\nu\,d\nu$

但 $F \overset{不一定}{=} const$.

逐次修正，求新的温度分布，使T在所有光深上等于σT_{eff}^4

Stroemgren方法.

由 $B(\tau)=\frac{3}{4}F[\tau+q(\tau)]$ 与 $\pi B=\sigma T^4$，$\pi F=\sigma T^4$.

$\cancel{B(\tau)} =$

$\Rightarrow \frac{T}{T_{eff}}=\left[\frac{B_\nu^{(1)}(\tau)}{F}\right]$

再次积分计算 $J_\nu^{(1)}=\Lambda_\tau\{B_\nu^{(1)}(t)\}$.

$\cancel{\Lambda_\tau}$

$$\Lambda_\tau\{f(t)\}=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)E_1(|t-\tau|)\,dt.$$

$$\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu^{(2)}(\tau)\,d\nu=\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu^{(1)}(\tau)\,d\nu.$$

(改变T与τ的关系)

$J_\nu^{(2)}=\Lambda_\tau\{B_\nu^{(2)}(t)\}$.

不断迭代，在小光深的情况下收敛很快.

温索德方法.

与Chandrasekhar类似 $F_\nu^{(1)}(\tau)=\Phi_\tau\{B_\nu^{(1)}(\tau)\}$

在任意深度上对全角度积分 $\pi F^{(1)}$，但与给定的πF有偏差

$\Delta F=F-F^{(1)}$.

找出新的温度分布，s.t. $\Delta F\to 0$.

(修正ΔB).

对 $\cos\theta \dfrac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$ 的两端乘 $d\omega/4\pi$. 假定 $\bar{\chi} = \bar{\chi}_\nu$ 时

$d\tau_\nu = d\tau$、对 ν 和全方向积分

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\frac{dF}{d\tau} = J - B.$$

故 $\Delta B = \Delta J - \dfrac{1}{4}\dfrac{d\Delta F}{d\tau}$.

ΔF 已知. 下求 ΔJ.

Eddington 近似下.

$$\frac{dp_R}{d\tau} = \text{const.} = \frac{4\pi}{c}\frac{dK}{d\tau} = \frac{\pi}{c}F = \frac{4\pi}{c}H.$$

而 $K = \dfrac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I(\theta)\cos^2\theta\, d\omega = \dfrac{J}{4\pi}\iint \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta d\varphi$

$$= \frac{1}{3}J.$$

$$\therefore \frac{1}{3}\frac{dJ}{d\tau} = \frac{1}{4}F \Rightarrow \frac{d\Delta J}{d\tau} = \frac{3}{4}F.$$

$$\Rightarrow \Delta J = \frac{3}{4}\int_0^\tau \Delta F dt + (\Delta J)_{\tau=0}.$$

$\tau = 0$ 时. Eddington 近似.

$J = 2H$. $\Rightarrow$ 差分 $\Delta J = 2\Delta H$.

$$\Delta J = \frac{3}{4}\int_0^\tau \Delta F dt + \frac{(\Delta F)_{\tau=0}}{2}$$ 本的.

再将 ΔJ 代回 $\Delta B = \Delta J - \dfrac{1}{4}\dfrac{d\Delta F}{dt}$

有 $\Delta B = \frac{3}{4}\int_0^\tau \Delta F \, d\tau + \frac{(\Delta F)_{\tau=0}}{2} - \frac{1}{4}\frac{d\Delta F}{d\tau}$

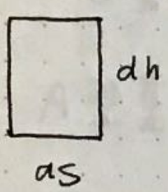
在光学深度大处有比较好的结果

对太阳可以从临边昏暗定出温度分布.

计算恒星大气模型.

有效温度. 表面重力加速度. 恒星化学组成.

假定流体静力学平衡. 能量守恒(辐射).



$g\rho \, dh \, ds$ 重力 $\downarrow$

$dP_g \, ds$ 大气压 $\uparrow$

$dP_R \, ds$ 辐射压 $\uparrow$

由辐射转移方程.

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{dh} = I_\nu \kappa_\nu \rho - j_\nu \rho$$

两边乘 $\cos\theta \, d\omega / c$ 对全方向积分.

$$dP_R = \frac{\pi \rho \, dh}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu F_\nu \, d\nu .$$

由 $g\rho \, dh \, ds = dP_g \, ds + dP_R \, ds$

$$\Rightarrow \frac{g}{\bar{\kappa}} = \frac{dP_g}{d\tau} + \frac{dP_R}{d\tau} \Rightarrow \frac{dP_g}{d\tau} = \frac{g}{\bar{\kappa}} - \frac{\sigma T_{eff}^4}{c}.$$

非O.B星. 辐射压不重要. 用有效温度代表.

$$\frac{dP_R}{d\tau} = \frac{\pi}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu F_\nu \, d\nu = \frac{\pi}{c}\bar{\kappa} F .$$

由于光致电离截面远小于 Thomson 散射截面，

动量交换主要考虑自由电子散射。

Eddington 极限：引力与辐射压力平衡

$$L = 1.25 \times 10^{38} m / M_e$$

$$L / L_{\odot s} = \left(\frac{T}{T_s}\right)^4$$ 故对太阳不重要，对 O 型星来说比较重要。

采用逐次近似的方法解方程。

$T(\tau)$ 关系，(T, p_e, p_g) 之另一个关系

$$N_e^{(s)} = \sum_r r N_r^{(s)} = f(a_s N^{(1)}, T, p_e)$$

$\downarrow$ 由谱线观测给出。

$$N_e = \sum_s \sum_r r N_r^{(s)}$$

$\therefore N_e = N_e(N^{(1)}, T, p_e)$ } $N^{(1)}$、N_e 两个未知数。

而 $p_e = N_e k_B T$

$$N_e(N^{(1)}, T, p_e) = p_e / k_B T$$

$$p_g = p_e + \sum_s a_s N^{(1)} k_B T$$

由方程积分 $\Rightarrow p_g(\tau)$

$p_g(\tau)$ 代入 (T, p_e, p_g) 关系 $\Rightarrow p_e(\tau)$

$\Rightarrow N^{(1)}(\tau)$

$\Rightarrow$ 密度分布 $\rho = \sum_s a_s N^{(1)}(\tau)$

由 $\tau = \int_0^h \chi \rho \, dh \Rightarrow$ 转化为线深度变化。

后计算 πF_ν 与 πF. 用类似方法迭代求解.

得到新的温度分布 ⇒ $P_g . P_e . \rho \sim h$. ⇒ 新的温度分布.

...

好的模型: 总辐流、常数性. 与观测符合的色温度

与 Balmer 跳跃.

也不一定在谱线上有很好对应.

还要比较温敏谱线的强度比检验调整物理量分布

O型星 HeII/HeI

A型星的大气模型

中性H在吸收占主导.

辐射压忽略不计.

电子散射忽略不计

A3型恒星 $T_{eff}=8900K$. H处于部分电离 $H^+ . H . H^- . H_2^+$

都有贡献.

He处于基态

表面 $\log g \approx 3.5$.

$$\log A \equiv \log (N_H / N-N_H) = 3.8$$

$$\chi_\nu = \chi_\nu(H) + \chi_\nu(H^+) + \chi_\nu(H^-).$$

取 Rosseland 平均

$$\frac{1}{\bar{\chi}}=\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}d\nu \Big/ \int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT}d\nu . \quad \bar{\chi}=\bar{\chi}(p_e,T)$$

由 (p_e, p_g, T) 的关系引入 $\bar{\chi}(p_e,T)$ 得到 $\bar{\chi}(p_g,T)$.

忽略辐射压

$$\frac{dp_g}{d\tau}=\frac{g}{\bar{\chi}(p_g,T)}$$

第一近似下 $\Theta^{(1)}=\Theta_c\left\{\frac{3}{4}(\tau+q(\tau))\right\}^{-1/4}$ $\Theta^{(1)}=\frac{5040}{T^{(1)}}$ $\Theta_c=\frac{5040}{T_{eff}}$.

Eddington 近似 $q(\tau)=\frac{2}{3}$.

有积分得 $p_g^{(1)}(\tau)$.

进而得到 $p_e^{(1)}(\tau)$, $\rho^{(1)}(\tau)$, $\bar{\chi}^{(1)}(\tau)$

算辐射流

$$F_\nu^{(1)}(\tau_\nu)=\Phi_{\tau_\nu}\{S_\nu(\tau_\nu)\}=\Phi_{\tau_\nu}\{B_\nu(\tau_\nu)\}$$

$$F^{(1)}=\int_0^\infty F_\nu(\tau_\nu)d\nu$$

根据 F 是常数 由 $\Delta F(\tau)=\frac{\sigma T_{eff}^4}{\pi}-F^{(1)}(\tau)$.

改正 ΔT 与 $\Delta\Theta \Rightarrow \Theta^{(2)}=\Theta^{(1)}+\Delta\Theta$

将 $\Theta^{(2)}$ 重新引入 $\frac{dp_g}{d\tau}=\frac{g}{\bar{\chi}(p_g,T)}$.

……

最终可以计算色温度.

Balmer跳跃. 利用 F_ν. 可以判断在系限附近 F_ν 的突变.

$D = \log(F_{3647^+}/F_{3647^-}) \approx 0.61$

但理论计算的 Balmer 跳跃比观测略大.

O-B型星.

free electron. H. He.

He 大多数处于基态 HeI. 基态电离产生的吸收带在 $\lambda < 504Å$

只有在 $T > 3\times10^4 K$ 时. He 的吸收重要.

$d\tau_\nu = (\kappa_\nu + \sigma_e)\rho dh$.

κ_ν H. He. 真吸收与负吸收.

设由H组成的恒星大气.

$$\sigma_e = \frac{N_e S_e}{\rho} = \left(\frac{N_H X_H}{N_H m_H}\right) S_e = \frac{X_H}{m_H} S_e.$$

考虑丰度后乘一系数

辐射转移方程中既包含真吸收又包含散射

辐射压不能忽略.

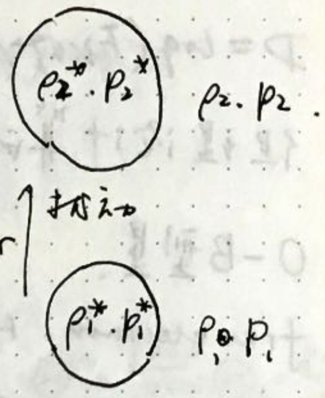
等效重力加速度.

不同光深用不同迭代方法.

对流. 辐射平衡中没有考虑对流和传导(在光球不重要)

但是对流在晚型星中仍不可忽略
(F.G).

恒星大气的扰动



M. Schwarzschild 辐射平衡稳定判据 dr

初始 $\rho_1^* = \rho_1.\ p_1^* = p_1$

扰动短暂. 无能量交换.

⇒ Adiabatic Expansion.

⇒ $p_2^* \longrightarrow p_2$

什么情况下能回到原位.

$$\rho_2^* = \rho_1^* (p_2^* / p_1^*)^{1/\gamma}. \quad \gamma = c_p/c_v.$$

$$= \rho_1 (p_2/p_1)^{1/\gamma} \quad (\text{~~Aiadia~~ Adiabatic} \Rightarrow \text{isoentropy}).$$

若 $\rho_2^* > \rho_2$. 则会落回原位. 做阻尼振荡. 扰动被耗散.

辐射平衡成立. 把压力与密度做Taylor展开

$$\rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} > \rho_2. \quad \rho_1 \left(1 + \frac{1}{p_1}\left(\frac{dp}{dr}\right)_1 dr\right)^{1/\gamma} > \rho_1 + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_1 dr.$$

$$\frac{1}{\gamma p}\frac{dp}{dr} > \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}.$$

由 $p = n k_B T = \dfrac{\rho k_B T}{\mu m_H}.$

$\ln p = \ln \rho + \ln T + \text{const}.$

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T}\frac{dT}{dr}.$$

消去 ρ.

$$\underbrace{\frac{1}{\gamma p}\frac{dp}{dr}}_{\text{Bubble量}} > \frac{1}{p}\frac{dp}{dr} - \underbrace{\frac{1}{T}\frac{dT}{dr}}_{\text{环境量}}.$$

$$-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}\frac{dp}{dr} > -\frac{dT}{dr}. \quad \left(\frac{dp}{dr}, \frac{dT}{dr} < 0\right)$$

Adiabatic $\Rightarrow p \propto T^{\gamma/\gamma-1}$

右边 $\left(\frac{dT}{dr}\right)_R$ 左边 $\left(\frac{dT}{dr}\right)_A$.

$$\Rightarrow \left(\frac{dT}{dr}\right)_A > \left(\frac{dT}{dr}\right)_R.$$

即 绝热膨胀体元.温度变化比周围辐射平衡建立的温度变化.

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{\gamma}\right) > \frac{d\ln T}{d\ln p}.$$

$$\nabla_A \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_A = \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad \nabla_R \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_R.$$

$$\Rightarrow \nabla_A > \nabla_R.$$

$$\overset{\shortparallel}{0.4}.$$

若μ不是常数（介质不均匀）

平衡条件 $\nabla_R < \nabla_A + \frac{d\ln\mu}{d\ln p}$ （$\frac{d\ln\mu}{d\ln p} < 0$，故有这一项更易产生对流）。

多原子元体 $\gamma \to 1$（接近于等温）

则只需 $\nabla_R > 0$（随便就满足了）

大量分子的热星，对流易产生
冷

电离态的变化 ⇒ μ变化 ⇒ 对流易产生

电子与质子复合 → 能量释放 → 对流易产生

辐射压，$\gamma = 4/3$ $\nabla_A = 0.25$

各种光谱型主序星中的对流区

较早光谱型，只有在 HeI → HeII 处有对流带

A型星，浅至深 $\tau \approx 2$ 处 H 电离

F型星，比A更深，更厚 F2-F5 对流起相当重要作用

晚型星，对流带更深，M型几乎全对流

能量的对流转移

对流减小温度梯度 ⇒ 辐射流↓

$$\pi F = \pi F_{rad} + \pi F_{conv} = \sigma T_{eff}^4$$

（辐射流不再随光深不变）

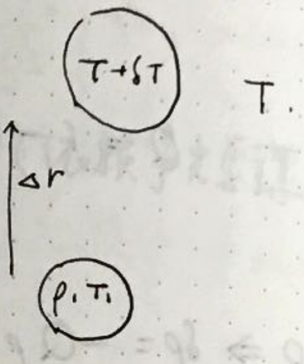
唯象理论：混合程理论

平均流体元经过 l 消失．温度梯度↓

对流元梯度 $\nabla_E = \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_E$.

$$\nabla_R \geq \nabla \geq \nabla_E \geq \nabla_A.$$

对流转移的辐射流



混合放能 $\rho c_p \delta T$.

$$\pi F_{conv} = \rho c_p \bar{v}\,\delta T = \rho c_p \bar{v}\left[\left(-\frac{dT}{dr}\right) - \left(-\frac{dT}{dr}\right)_E\right]\Delta r$$

取 $\Delta r = \frac{l}{2}$.

由流体静力平 $\frac{dp}{dr} = -\rho g$.

引入压力标高 $H = -\frac{p}{(dp/dr)} = -\left(\frac{d\ln p}{dr}\right)^{-1} = \frac{p}{\rho g}$

$$\nabla = \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right) = -\frac{H}{T}\frac{dT}{dr}, \Rightarrow -\frac{dT}{dr} = \frac{T}{H}\nabla.$$

代入原方程.

$$\pi F_{conv} = \rho c_p \bar{v}\left[\frac{T}{H}\nabla - \frac{T}{H}\nabla_z\right]\frac{l}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho c_p \bar{v} T(\nabla - \nabla_z)\frac{l}{H}$$

平均速度：令浮力做功=体元获得动能.

$f_b = -g\delta\rho$.

由理想气体方程 $d\ln\rho = d\ln p - d\ln T + d\ln\mu$.

$$= d\ln p - Q\, d\ln\mu.$$

$$Q = 1 - \left(\frac{\partial\ln\mu}{\partial\ln T}\right)_p.$$

$$\delta p = 0 \Rightarrow \delta\rho = -Q\rho\,\delta T/T.$$

$$f_b = -g\delta\rho = gQ\rho\frac{\delta T}{T} = \frac{gQ\rho}{H}(\nabla - \nabla_z)\Delta r. \text{（线性）}$$

$$\overline{W} = \int_0^{\frac{l}{2}} f_b\, d(\Delta r) = \underline{\frac{gQ\rho}{H}(\nabla - \nabla_z)}\int_0^{\frac{l}{2}}(\Delta r)\, dr$$

近似认为不变

$$= \frac{gQ\rho}{H}(\nabla - \nabla_z)\frac{l^2}{\cancel{4}\cancel{8}4}.$$

所做功一半用于推动近邻体元，一半用于提供动量.

$$\frac{1}{2}\rho\overline{v}^2=\frac{1}{2}\overline{W}$$

$$\Rightarrow \overline{v}=\left(\frac{gQH}{8}\right)^{1/2}(\nabla-\nabla_E)^{1/2}\left(l/H\right).$$

$$\pi F_{conv}=\left(\frac{gQH}{32}\right)^{1/2}(\rho c_p T)(\nabla-\nabla_E)^{3/2}\left(\frac{l}{H}\right)^2$$

但混合程大小未知．假设 $l=nH$，$n=1,2,\ldots$ 模拟 $\Leftrightarrow$ 观测

对流效率参数．

对流无限解．多余能量 $\propto\nabla-\nabla_E$

辐射损失 $\propto\nabla_E-\nabla_A$．（依赖于光学薄厚）

$$\Gamma\equiv\frac{\nabla-\nabla_E}{\nabla_E-\nabla_A}.$$

光学薄极限

$$\Delta E_R=4\pi j_E\rho-4\pi\overline{\chi}B=4\pi\rho\overline{\chi}(B_E-B)=4\pi\rho\overline{\chi}\Delta B.$$

$$\Gamma_{thin}=\frac{\rho c_p\overline{v}}{8\sigma T^3}\frac{1}{\tau_l}$$

光学厚极限．

流一：$\xi = \dfrac{\rho c_p \bar{v}}{8\sigma T^3} \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}\tau_L^2\right)}{\tau_L}$ 对 $\tau_L \approx 1$ 情况好。

对流的大气模型更加复杂

1. 初始的温度分布

2. ~~F...~~ 用 FSOM 计算 $P_g . P_R$.

3. 计算 ∇_R 与 ∇_A. 根据 Schwarzchild 稳定判据确定对流存在

4. 有对流 ⇒ 能量守恒代替辐射平衡

太阳型恒星的大气模型

利用临边昏暗 $\dfrac{I_\lambda(\theta,0)}{I_\lambda(0,0)} = A_\lambda + \overset{C}{B_\lambda}\cos\theta + D_\lambda\cos^2\theta$.

由 RTE 形式解 $I_\lambda(\theta,0) = \int_0^\infty B_\lambda e^{-\tau_\lambda \sec\theta} \sec\theta d\tau_\lambda$.

$$\varphi_\lambda(\theta) = \frac{I_\lambda(\theta,0)}{I_\lambda(0,0)} = \int_0^\infty \frac{B_\lambda(T)}{I_\lambda(0,0)} e^{-\tau\sec\theta} \sec\theta d\tau_\lambda \text{ (积分收敛)}.$$

$$\text{对 } \frac{B_\lambda(T)}{I_\lambda(0,0)} \underset{\text{展开}}{\overset{\text{Taylor}}{=\!=}} a_\lambda + c_\lambda\tau_\lambda + d_\lambda\tau_\lambda^2 + \cdots$$

积分得到 $a_\lambda + c_\lambda \cos\theta\, \tau_\lambda + 2d_\lambda \cos^2\theta\, \tau_\lambda^2 + \cdots$

$$\therefore \frac{B_\lambda(T)}{I_\lambda(0,0)} = \cancel{a_\lambda + c_\lambda + \tfrac{1}{2}d_\lambda}$$
$$A_\lambda + C_\lambda\tau_\lambda + \frac{1}{2}D\tau_\lambda^2$$

⇒ 得 $T \sim \tau_\lambda$ 分布关系

类太阳型恒星 $T_{(\tau)} = T_{\odot}(\tau) \cdot \frac{T_{eff}}{T_{\odot eff}}$

晚型恒星大气模型. 分子吸收对Opacity的贡献大.

对流与能量平衡.

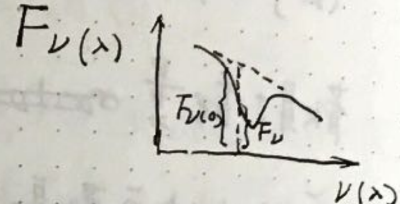
作业 1、2、3.

吸收线内的辐射转移.

大气元素丰度.

吸收线转RTE.

吸收线的参数. ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$)



剩余强度 r_ν (r_λ)

$r_\nu = \frac{I_\nu(\theta)}{I_\nu^0(\theta)}$ 或 $\frac{F_\nu}{F_\nu^0}$ 吸收线内 $r_\nu < 1$ 连续谱 $r_\nu = 1$

线心 $\nu = \nu_0$ 中心剩余强度

$r_\nu \sim \nu \Rightarrow$ 谱线轮廓、线心 线翼

线深度 $R_\nu = 1 - r_\nu$ ($I_\nu(\theta)$ / F_ν).

总吸收 W_ν (轮廓与背景包围的面积).

连续光谱减弱的总量

等值宽度. 用矩形代替总吸收得到的矩形宽度.

数值上与 W_ν、W_λ 相等. 一般以 Å 给出.

fwhm

吸收线产生机制

谱选择吸收.

选择真吸收与选择散射.

如果由 $j\to k$ 与其他原子碰撞转化为热能

由 $j\to k$ 真吸收光量子电离 ⇒ 热能 } 真吸收

由 $j\to k$ 再由 $k\to j$ 放出光子 选择散射

由 $j\to k$. 由 $k\to i$ 谱联锁效应 不同谱线间的能量交换.

散射能量 $\cancel{\sigma_\nu J_\nu} = 4\pi\sigma_\nu J_\nu = \sigma_\nu\int_{4\pi} I_\nu(\theta)\,d\omega$

相干散射单位立体角散射能量 $\sigma_\nu J_\nu$.

吸收线 RTE.

连续/选择 + 真吸收/散射

$$\cos\theta\frac{dI_\nu(\theta,h)}{dh} = \text{吸收} - \text{辐射}$$

= 连续真吸收 + 连散 + 选真 + 选散

− 连辐 − 连散辐 − 选辐 − 选散辐.

吸收线内认为连续吸收系数为常量.

连续真吸收 χ 连续散射 σ.

选择真吸收 $\chi_\nu = \varepsilon_\nu l_\nu$

(形成机制相同) 总的选择吸收系数

选择散射 $\sigma_\nu = l_\nu - \chi_\nu = (1-\varepsilon_\nu) l_\nu$

连真 $I_\nu \chi \rho$

连辐 $\chi \rho B_\nu(T)$

连散 $I_\nu \sigma \rho$

连散辐 $\sigma \rho J_\nu(h)$

选真 $I_\nu \chi_\nu \rho = I_\nu \varepsilon_\nu l_\nu \rho$

选辐 $\chi_\nu \rho B_\nu(T) = \varepsilon_\nu l_\nu \rho B_\nu(T)$

选散 $I_\nu \sigma_\nu \rho = I_\nu (1-\varepsilon_\nu) l_\nu \rho$.

选散辐 $\sigma_\nu \rho J_\nu(h) = (1-\varepsilon_\nu) l_\nu \rho J_\nu(h)$.

代回RTE 应有

$$\cos\theta \frac{dI_\nu(\theta, h)}{dh} = \left[(\chi + \sigma + \chi_\nu + \sigma_\nu) I_\nu\right] + \left[-(\sigma + \sigma_\nu) J_\nu - (\chi + \chi_\nu) B_\nu\right]$$

$$= \left[(\chi + \sigma + l_\nu) I_\nu\right] - \sigma J_\nu - (1-\varepsilon_\nu) l_\nu J_\nu - \chi B_\nu - \varepsilon_\nu l_\nu B_\nu$$

非 0-B. $\sigma \Rightarrow 0$. 有

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{dh} = (\chi + l_\nu) I_\nu - (1-\varepsilon_\nu) l_\nu J_\nu - \chi B_\nu - \varepsilon_\nu l_\nu B_\nu$$

当 σ 目需要考虑时. 大量原子已电离 很少停留在能级上 吸收线很弱.

两个 Assumption ① 相干散射.

(2) 无联锁效应.

(近似当作真吸收处理)

求解 RTE. 需知 ① l_ν、ε_ν 与 h 的关系

② B_ν (~~ρ~~)、ρ 与 h 的关系

在不涉及 ~~及~~ l_ν、ε_ν 的具体形式下 求解 RTE.

反变层模型 (连续谱. 吸收线形成区分离).

Schuster / Schwarzchild 模型. 谱线 (产生于较外层)

对 l_ν/χ 随恒星表面快速增加. ~~模型~~ S-S 模型有较好近似

吸收在光球上的冷的大气形成的

$\tau=0$ 处 连续谱辐射强度随 θ 的关系.

$$B_\nu(T) \xrightarrow{\text{Taylor 展开}} B_\nu(T_0)(1+\beta_0\tau).$$

T_0: $\tau=0$ 的温度.

小频率范围内 取定义出来的

$$\beta_0 = \frac{1}{B_\nu(T_0)}\left(\frac{dB}{d\tau}\right)\bigg|_{\tau=0} = \frac{1}{B_\nu(T_0)} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{d\bar\tau} \frac{d\bar\tau}{d\tau}.$$

利用 Eddington 近似下有 $T^4 = \frac{T_{eff}^4}{2}\left(1+\frac{3}{2}\bar\tau\right)$

代入得 $\beta_0 = \frac{3}{8}\left(\frac{\bar\chi}{\chi}\right)_{\tau=0} \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$ $\alpha = h\nu/k_BT$.

两边乘 $\frac{d\omega}{4\pi}$ 对全角度积分.

$$\frac{d}{d\tau_\nu}(\pi F_\nu)=0.$$

单色辐射流~~的积分为常数~~不随光深变化.

向外 I_ν. 向内 I_ν'. (类似 Eddington 近似).

考虑向外.

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\int_{2\pi} I_\nu \cos\theta \, d\omega = \int_{2\pi} I_\nu \frac{d\omega}{2\pi} - J_\nu \int_{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}\langle\cos\theta\rangle = I_\nu - J_\nu.$$

令 $\langle\cos\theta\rangle = a$.

$$a\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - J_\nu. \quad \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$$

向内 $a\dfrac{dI_\nu'}{d\tau_\nu} = -I_\nu' + J_\nu \quad \psi\in(0,\frac{\pi}{2})$

a? ⇒ 两式相加. ⇒ $a\dfrac{d(I_\nu+I_\nu')}{d\tau_\nu} = (I_\nu - I_\nu').$

代入连续谱RTE形式解.

$$I_\nu=\int_\tau^\infty B_\nu e^{-(t-\tau)\sec\theta}\sec\theta dt$$

代入B_ν的展开式.

$$I_\nu^0(\theta)=\int_0^\infty B_\nu(T_0)(1+\beta_0 t)e^{-t\sec\theta}\sec\theta dt.$$

$$=B_\nu(T_0)\left(1+\beta_0\cos\theta\right).$$

$\theta=0,\ I_\nu^0(\theta)=B_\nu(T_0)(1+\beta_0).$

故 $\dfrac{I_\nu^0(\theta)}{I_\nu^0(0)}=\dfrac{(1+\beta_0\cos\theta)}{1+\beta_0}.$ (反变层表面).

若反变层只有~~毒~~纯散射.(全部跳回原能级).

$\chi=0,\ \sigma=0,\ \chi_\nu=0.$

RTE:

$$\cos\theta\,\frac{dI_\nu(\theta,h)}{\rho dh}=\sigma_\nu I_\nu(\theta,h)-\sigma_\nu J_\nu(h).$$

引入散射光学深度 $\tau_\nu=\sigma_\nu\rho dh.$

辐射阻尼与谱线的自然致宽.

$dI_\nu = -I_\nu a_\nu N_j \, dh$.

能量 $\int_{4\pi} d\Omega\, I_\nu = 4\pi N_j a_\nu J_\nu d\nu$.

总能量 $4\pi N_j \int a_\nu J_\nu d\nu$.

谱线窄 $= 4\pi N_j J_\nu \int a_\nu d\nu$.

要与 E~~instein Stimulated Emission~~ 概率比较.

吸收概率

$$4\pi N_j J_\nu \int a_\nu d\nu = N_j B_{jk} J_\nu h\nu_{jk}.$$

$$\Rightarrow \int a_\nu d\nu = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} B_{jk}.$$

辐射阻尼使一维谐振子不再发出简谐波.

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-\gamma_0 t/2} e^{-i\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

$$\mathcal{E}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e(t) e^{-i\omega t}$$

$$\propto \int_0^{\infty} \mathcal{E}_0 e \qquad \propto -1/(i(\omega-\omega_0) - \gamma_0/2)$$

$$k\omega = \mathcal{E}(\omega)\mathcal{E}^*(\omega) = \frac{4\pi e^2}{m_e c} \frac{\gamma_0}{4(\omega-\omega_0)^2 + \gamma_0^2}.$$

$$k_\nu = \frac{e^2}{m_e c} \frac{\gamma_0/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma_0/4\pi)^2}$$

$$\gamma_0 = \frac{8\pi^2 e^2 \nu_0^2}{3 m_e c^3}$$

可见光 $\nu \sim 10^{15}$ Hz. $\gamma_0 \sim 10^{8}$ Hz

在 $|\nu-\nu_0| < \gamma_0$ 内有吸收.

换算到波长 $\gamma_0 = \frac{d\lambda}{d\nu} \Delta\nu = 1.18\times10^{-4}$ Å.

自然致宽.

$\nu = \nu_0 + \gamma_0 \Rightarrow k_\nu = \frac{k_{\nu_0}}{2}$

在线翼. 分母上的 γ_0 可忽略.

$$k_\nu / k_\omega \propto \frac{1}{(\Delta\omega)^2}$$

一个振子的吸收系数 ⇒ 一个谱线的吸收系数.

$N_{振} \cdot k_\nu = N_{原} \cdot a_\nu$.

振子强度

$$a_\nu = \frac{e^2}{m_e c} \frac{\gamma_0}{4\pi} \frac{f_{jk}}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma_0/4\pi)^2}.$$

利用 $\int a_\nu d\nu = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} B_{jk}$

延拓到$\pm\infty$，

$$\int a_\nu d\nu = \frac{e^2}{m_e c} f_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma_0/4\pi)^2} d(\nu-\nu_0)$$

$$= \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{jk}$$

$$\Rightarrow f_{jk} = \frac{m_e c h\nu_{jk}}{4\pi^2 e^2} B_{jk}.$$

只考虑 Spontaneous Emission 的减少.

$$\frac{dN_k/dt}{N_k} = -\sum_{j=1}^{k-1} \int_{4\pi} A_{kj} \frac{d\omega}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{dN_k}{dt} = -N_k \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj}.$$

$$N_k = N_k^0 \exp\left\{\left(-\sum_{j=1}^{k-1} A_{kj}\right) t\right\}.$$

固有特性.

$$N_k = N_k^0 \exp(-\gamma_k t).$$

平均停留时间.

$$\tau_k \equiv \frac{\int t\, dN_k}{\int dN_k} = \frac{1}{\gamma_{0k}}$$

处于辐射场内.

$$\frac{dN_k}{dt} = -\sum_{j=1}^{k-1}\int_{4\pi} A_{kj}\frac{d\omega}{4\pi} - \sum_{j=1}^{k-1}\int_{4\pi} B_{kj} I_{\nu kj}\frac{d\omega}{4\pi}$$

$$-\sum_{i=k+1}^{\infty}\int_{4\pi} B_{ki} I_{\nu ki}\frac{d\omega}{4\pi} - R_{kf}$$

$$\Rightarrow \frac{dN_k}{dt} = -\sum_{j=1}^{k-1} A_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} B_{kj} J_{\nu kj} - \sum_{i=k+1}^{\infty} B_{ki} I_{\nu ki} - R_{kf}.$$

$$\Rightarrow \gamma_k = \frac{1}{\tau_k} = \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj} + \sum_{j=1}^{k-1} B_{kj} J_{\nu kj} + \sum_{i=k+1}^{\infty} B_{ki} I_{\nu ki}$$

$$+ R_{kf}.$$

忽略外场. 发现低激发态寿命短. 能级宽.

$$W_k(E)\,dE = \frac{\gamma_k}{h}\frac{dE}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 (E-E_k)^2 + \left(\frac{\gamma_k}{2}\right)^2}$$

跃迁概率

$$W_j(E')\,W_k(E)\,dE'\,dE$$

$$= \frac{dE\,dE'}{\left[\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 (E'-E_j)^2 + \left(\frac{\gamma_j}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 (E-E_k)^2 + \left(\frac{\gamma_k}{2}\right)^2\right]}\cdot\frac{\gamma_j\gamma_k}{h^2}.$$

$$P(\nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} W_j(E')\, W_k(E)\, d(E'-E_j)\, dE$$

令 $a = h\gamma_j/4\pi \quad b = h\gamma_k/4\pi$

$$= \frac{h d\nu}{\pi} \cdot \frac{a+b}{(E_j - E_k + h\nu)^2 + (a+b)^2}$$

$$= \frac{d\nu}{\pi} \frac{\frac{\gamma_j + \gamma_k}{4\pi}}{(\nu - \nu_{jk})^2 + \left(\frac{\gamma_j + \gamma_k}{4\pi}\right)^2}$$

$a_\nu \propto P(\nu)$. 由 $\int A P_\nu(\nu) d\nu = \frac{\pi e^2}{mec} f_{jk}$.

$$\Rightarrow A = \frac{\pi e^2}{mec} f_{jk}.$$

$$\Rightarrow a_\nu = \frac{e^2}{mec} \frac{\gamma}{4\pi} \frac{f_{jk}}{(\nu - \nu_{jk})^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2}.$$

$\gamma = \gamma_j + \gamma_k$

两个能级的联合致宽.

考虑碰撞 $\gamma = \gamma_j + \gamma_k + \gamma_e$.

微观 Doppler 展宽.

随机运动.

热运动 湍流. 视向速度 ξ.

$$\nu-\nu_{jk} = \frac{\xi}{c}\nu_{jk}.$$

$$a_\nu d\nu \propto dn/n.$$

取 x 轴视向.

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\xi/\xi_0)^2} \frac{d\xi}{d\xi_D}$$

$$\xi_0^2 = \frac{2k_BT}{\mu m_H}$$

微湍动: 湍动源尺度小于光子自由程.

则 Maxwell 分布仍可用于湍动. (非相关).

$$\xi = v_x + \xi_t$$

形式不变 $\frac{dn}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\xi/\xi_0)^2} \frac{d\xi}{\xi_D}.$

$$\xi_D^2 = \frac{2k_BT}{\mu m_H} + \xi_t^2$$

$$a_\nu d\nu = A\frac{dn}{n}.$$

由 $\nu - \nu_{jk} = \frac{\xi}{c}\nu_{jk}$.

$$d\nu = d(\Delta\nu) = \frac{\nu_{jk}}{c}d\xi.$$

令 $\frac{\Delta\nu_D}{\nu_{jk}} = \frac{\xi_D}{c}$ ← 多少公里/秒的宽度.

$$\Rightarrow a_\nu d\nu = \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\nu-\nu_{jk}}{\Delta\nu_D}\right)^2} \frac{d\nu}{\nu_D}.$$ 由 $\int a_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{jk}$

$$\Rightarrow a_\nu = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{m_e c} \frac{f_{ik}}{\Delta\nu_D} e^{-\left(\frac{\nu-\nu_{jk}}{\Delta\nu_D}\right)^2}$$

Gauss 形的谱线. 下降与 $e^{-\left(\frac{\nu-\nu_{jk}}{\Delta\nu_D}\right)^2}$ 成正比. 比辐射阻尼下降快.

$|\nu - \nu_{jk}| = \Delta\nu_D$ a_ν 变为 e^{-1}

$FWHM = 2\sqrt{\ln 2}\,\Delta\nu_D$. 半高宽度.

经典辐射阻尼展宽 $\gamma_0 = 10^{-4}$Å.

Hα 线半高全宽 ~~为~~ $\Delta\lambda_D \approx 0.2$Å

观测上 Doppler 致宽 ~~要~~ 占主导.

如果湍动分布不是 Maxwell 分布. 合成速度分布规律由 $\Phi(\xi)$ 对热运动速度分布进行卷积.

Doppler 效应 $\begin{cases} \text{谱线致宽. 等值宽度} \uparrow \\ \text{增加对辐射总吸收.} \end{cases}$

宏观Doppler致宽

大气宏观湍动. 自转.

湍动元尺度远大于光子自由程(Optical thick)

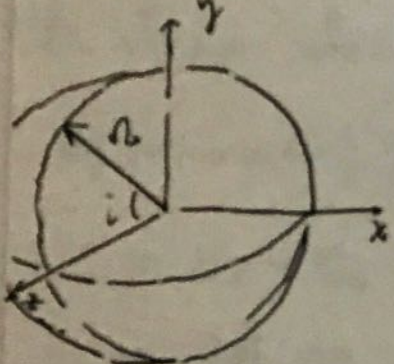
(光学厚的).

不同湍动元有不同的视向速度. 吸收不同的线心

总谱线轮廓是每个谱线轮廓的线性叠加.

不影响总吸收.

自转



$$\vec{\Omega} = \Omega(\sin i\,\hat{e}_y + \cos i\,\hat{e}_z).$$

$$\vec{v}_z = (\vec{\Omega}\times\vec{R})_z$$

$$= -x\Omega\sin i$$

$$= -\frac{x}{R} v_{eq}\sin i.$$

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda}{c} v_z = \frac{\lambda}{c} v_{eq}\, x\sin i \quad (\text{取} R=1)$$

$I_\beta(\lambda-\lambda_0)$ 是点(x,y)沿视线方向的辐射强度.

$I_\beta^0(\lambda)$ 是连续谱强度

$$dE_\lambda = I_\beta(\lambda-\lambda_0') \, dx\,dy\,d\lambda\,\Delta\omega.$$

连续谱 $dE^0_\lambda = I^0_\beta(\lambda)\, dx\,dy\,d\lambda\,\Delta\omega$

$$R_\lambda = 1 - r_\lambda = \frac{\iint \left[I^0_\beta(\lambda) - I_\beta(\lambda-\lambda_0')\right] dx\,dy}{\iint I^0_\beta(\lambda)\,dx\,dy}.$$

$$= \frac{\iint R_\beta(\lambda-\lambda_0')\, I^0_\beta(\lambda)\,dx\,dy}{\iint I^0_\beta(\lambda)\,dx\,dy}.$$

$$R_\beta(\lambda-\lambda_0') = I^0_\beta(\lambda) - I_\beta(\lambda-\lambda_0') / I^0_\beta(\lambda)$$

若 R_β 与 β 无关.

$$R_\lambda = \frac{\iint R(\lambda-\lambda_0')\, I^0_\beta(\lambda)\,dx\,dy}{\iint I^0_\beta(\lambda)\,dx\,dy}.$$

若考虑邻边昏暗

$$R_\lambda = \frac{\iint R(\lambda-\lambda_0')\, I^0_n(\lambda)\,\varphi(\lambda,\beta)\,dx\,dy}{\iint I^0_n(\lambda)\,\varphi(\lambda,\beta)\,dx\,dy}.$$

$$\varphi(\lambda,\beta) = 1 - u_\lambda + u_\lambda \cos\beta.$$

$$R_\lambda = \frac{\int_{-1}^{1} dx \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} R\left[\lambda - \lambda_0\left(1 + x\frac{v_{eq}}{c}\sin i\right)\right] \varphi(\lambda,\beta)\,dx\,dy}{\int_{-1}^{1} dx \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \varphi(\lambda,\beta)\,dy}.$$

辐射阻尼与Doppler联合效应

对 $\xi_{\cos} \in [\xi, \xi + d\xi]$ 范围内的原子、

由阻尼效应

$$a_\nu = \frac{e^2}{mec}\delta_{jk}\frac{f_{jk}}{(\nu-\nu_{jk})^2+\delta_{jk}^2}. \qquad \delta_{jk} = \frac{\gamma_j+\gamma_k+\gamma_c}{4\pi}$$

ν_{jk} 发生了移动 $\Delta\nu = \frac{\xi}{c}\nu_{jk}$

$$a_\nu = \frac{e^2}{mec}\delta_{jk}\frac{f_{jk}}{(\nu-\nu_{jk}-\Delta\nu)^2+\delta_{jk}^2}$$

加权积分 $\frac{dn}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\xi/\xi_D)^2}\frac{d\xi}{\xi_D}.$

$$\Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2}\frac{d(\Delta\nu)}{\Delta\nu_D}.$$

$$a_\nu = \int \frac{e^2}{mec}\delta_{jk}\frac{f_{jk}}{(\nu-\nu_{jk}-\Delta\nu)^2+\delta_{jk}^2}\frac{dn}{n} \Big/ \int\frac{dn}{n}$$

令 $y = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}.$

$p = \frac{\nu-\nu_{jk}}{\Delta\nu_D}.$

$a = \frac{\delta_{jk}}{\Delta\nu_D}.$

$$a_{\nu_0} = \frac{\sqrt{\pi}e^2}{mec}\frac{f_{jk}}{\Delta\nu_D}.$$

有 $\frac{a_\nu}{a_{\nu_0}} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}}{a^2+(p-y)^2}dy = H(a,p)$.

Voigt Function.

若无辐射阻尼，$a=0$.

积分号里是 $e^{-y^2}\delta(p-y)$，恢复成指数形式.

$\Rightarrow$ $a \ll 1$.

$a_\nu = a_{\nu_0} e^{-[(\nu-\nu_{jk})/\nu_D]^2}$. Doppler Core.

离线心较远，Doppler效应减弱，吸收系数由辐射阻尼效应确定.

$$a_\nu = \frac{e^2}{m_e c}\delta_{jk}\frac{f_{jk}}{(\nu-\nu_{jk})^2+\delta_{jk}^2}.$$

压力致宽.

吸收原子和周围质点作用产生谱线致宽.

碰撞使振子波列不连续 $\longrightarrow$ 在频谱上展宽.

Collision Damping Theory.

与气压有关.

Collision Statistical Theory.

致宽来自于碰撞导致的能级变化.

Stark Effect，辐射原子能级在电场中分裂.

不同分裂不同 $\longrightarrow$ 宏观上看到统计平均

碰撞阻尼理论。

在 $-\frac{T}{2}$ 到 $\frac{T}{2}$ 间振以 $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ 辐射。

$$\mathcal{E}(t) = Ae^{i\omega_0 t} \quad (t \in [-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}]).$$

$$0 \quad (t \notin [-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}]).$$

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega_0 - \omega) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} A \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} T\right) \Big/ \left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right).$$

$$\therefore I(\omega) \propto \left(\frac{\sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} T}{\frac{\omega_0 - \omega}{2}} \right)^2$$

在 $T \sim T + dT$ 内碰撞概率

$$\frac{1}{\tau_c} \exp(-T/\tau_c) \, dT.$$

不同波段叠加。

$$I_\nu \propto \int_0^\infty P(\omega, T)\, e^{-T/\tau_c}\, dT \Big/ \int_0^\infty e^{-T/\tau_c}\, dT.$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\sin\pi(\nu-\nu_0)T}{\pi(\nu-\nu_0)}\right)^2 e^{-T/\tau_c}\,\frac{dT}{\tau_c}.$$

$$= \frac{\gamma_c/4\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\gamma_c/4\pi)^2} \propto a_\nu.$$

a_ν 的系数由 $\int a_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{ik}$ 给出.

$$\therefore a_\nu = \frac{e^2}{m_e c}\,\frac{\gamma_c}{4\pi}\,\frac{f}{(\nu_0-\nu)^2+(\gamma_c/4\pi)^2}.$$

形式上与辐射阻尼一致.

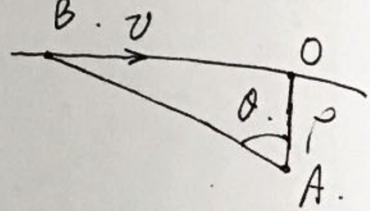
$$\gamma_c = \frac{2}{\tau_c} = 2N\bar{v}\sigma.$$

γ_c ↓ 半高全宽.　　N ↓ 数密度 ↑ p ↑ 谱线更宽

碰撞阻尼常数的确定.

扰动粒子经过辐射振子附近，与辐射振子相互作用的
辐射振子~~相互~~频率改变，相位改变 η.

$\eta \sim \rho$?



$$r = \sqrt{\rho^2 + v^2 (t - t_0)^2}$$

电磁相互作用时辐射振子频率 ν 改变.

$$\Delta\nu = \frac{C_n}{r^n} \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi C_n}{r^n}$$

（以氢原子为例，有电偶极矩项 $\sim \frac{1}{r^2}$）.

线性 Stark effect $(n=2)$，二次 Stark effect ...

$$d\eta = \Delta\omega\, dt = \frac{2\pi C_n}{[\rho^2 + v^2 (t-t_0)^2]^{n/2}}\, dt.$$

$$\eta(\rho) = \int d\eta \overset{近似}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi C_n}{[\rho^2 + v^2 (t-t_0)^2]^{n/2}}\, dt.$$

$r = \rho / \cos\theta$. $\quad dx = d(\rho \tan\theta) = \rho \sec^2\theta\, d\theta$.

积分得到 $\eta(\rho) = \frac{2\pi C_n}{v \rho^{n-1}} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} \theta\, d\theta}_{\alpha_n}$

$$= \frac{2\pi C_n}{v \rho^{n-1}} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

临界相移对应瞄准距.

$$\rho_0 = \left(\frac{2\pi C_n}{\bar{v}\,\eta_0}\alpha_n\right)^{1/n-1}$$

通常η_0取1弧度或$\frac{2}{\pi}$

碰撞截面 $\sigma = \pi\rho^2$.

$$\gamma_c = 2\pi N\bar{v}\left(\frac{2\pi C_n\alpha_n}{\bar{v}\,\eta_0}\right)^{2/(n-1)}.$$

(相对速度)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}RT\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)}$$

事实上碰撞前后波相关.

$$a_\nu = \frac{e^2}{m_e c}\frac{\gamma}{4\pi}\frac{f}{(\nu-\nu_0-\beta)^2+(\gamma_c/4\pi)^2}.$$

不但使谱线展宽还使线心移动.

碰撞阻尼与辐射阻尼的相互作用.

先辐射阻尼展宽,再被碰撞阻尼展开.

$$f(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega-\omega')^2+(\gamma_c/2)^2}\frac{d\omega'}{(\omega'-\omega_0)^2+(\gamma_0/2)^2}.$$

$$= \frac{(\gamma_c+\gamma_0)/2}{(\omega-\omega_0)^2+[(\gamma_0+\gamma_c)/2]^2}.$$

利用.

$a_\nu = A I_\nu$.

$$\int a_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f.$$

有 $\cancel{\frac{\pi e^2}{m_e c} f}\ a_\nu = \frac{e^2}{\cancel{4\pi}\, m_e c} \cdot \frac{(\gamma_c+\gamma_0)}{4\pi} \frac{f}{(\nu-\nu_0)^2+\left(\frac{\gamma_c+\gamma_0}{4\pi}\right)^2}$.

回到量子形式

$$a_\nu = \frac{e^2}{m_e c}\delta_{jk} \frac{f}{(\nu-\nu_{jk})^2+\delta_{jk}^2}$$

$$\delta_{ij} = \frac{1}{4\pi}(\gamma_j + \gamma_k + \gamma_c).$$

压力效应的统计理论.

与 Stark effect 有关的统计理论.

外场 $< 10^5 V/cm$. (应小于 ~~Cou~~ 氢原子自身的 Coulumb场 不再是微扰)

裂距 $\propto$ 场强.

其他一些原子(除 He) 一般只有二次 Stark effect.

线性 Stark effect.

外场

$$\Delta E = \frac{3}{8\pi^2}\frac{h^2}{e m_e} n n_F F.$$

$n_F = 0, \pm 1, \ldots$

分裂能级对称，分裂数目随 $n\uparrow$ 而 $\uparrow$.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c}\frac{\Delta E_1 - \Delta E_2}{h}$$

$$= \frac{3}{8\pi^2}\frac{h\lambda^2}{ceme}(nn_F - n'n'_F)F.$$

$$= 0.0192\lambda^2(nn_F - n'n'_F)F$$

$$(\lambda \sim cm,\ F \sim V/cm,\ cgs).$$

恒星中无强宏观电场，但微观离子运动可能带来强微观场，且随时变化。

在统计上用平均场近似，认为辐射粒子与扰动粒子无相对运动，对离子近似成立。

场强值满足一定概率分布。

设场强 F 的概率密度为 $\Phi(F)$.

谱线分裂成 n 条

第 k 条子线对线心距为 $[\Delta\lambda,\ \Delta\lambda + d(\Delta\lambda)]$ 处

辐射贡献为

$$I_k\Phi(F_k)dF_k \quad (dF_k 与 d(\Delta\lambda) 对应).$$

$$I(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda) = \sum_k I_k\Phi(F_k)dF_k.$$

若知道 $I(\Delta\lambda) \rightarrow a_\nu$.

需要$\Phi(F)$的函数表达式.

对F较大的值, 只考虑离得最近的那个粒子的作用.

$p(r)dr$ 表示最近扰动粒子在$(r, r+dr)$内的概率

$W^*(r)$ 表示在r内无扰动粒子概率

$W(r)dr$ 表示在$(r, r+dr)$有粒子的概率.

$$P(r)dr = W^*(r)W(r)dr.$$

$$W(r)dr = N4\pi r^2 dr.$$

$$W^*(r+dr) = W^*(r)\left[1-W(r)dr\right].$$

$$\Rightarrow \frac{W^*(r+dr)-W^*(r)}{W^*(r)} = -W(r)dr.$$

$$\frac{dW^*(r)}{W^*(r)} = -4\pi N r^2 dr.$$

$$\Rightarrow W^*(r) = e^{-\frac{4\pi}{3}Nr^3}.$$

$\therefore p(r)dr = e^{-\frac{4}{3}\pi N r^3} \underset{\frac{\wedge}{N}}{4\pi r^2 dr}.$

设 r_0 为扰动粒子平均距离的一半.

有 ~~$\frac{4}{3}\pi r_0$~~ $\frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{1}{N}$.

$$p(r)dr = e^{-(r/r_0)^3} d\left(r/r_0\right)^3.$$

假设恒星大气中扰动粒子带电为 e.

令 $F_0 = \frac{e}{r_0^2} = e\left(\frac{4\pi N}{3}\right)^{2/3}$. ~~在~~ 径电场上菲.

$$\beta \equiv \frac{F}{F_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{r}{r_0} = \beta^{-1/2}.$$

$$W(\beta)d\beta = p\left(\frac{r}{r_0}(\beta)\right) d\left(\frac{r}{r_0}(\beta)\right)$$

$$= \frac{3}{2}\beta^{-5/2} e^{-\beta^{3/2}} d\beta.$$

全体扰动粒子.

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi\beta}\int_0^\infty v\sin v\, e^{-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{3/2}} dv.$$

β 很小. e 指数很大. 可以展开正弦函数积分.

首先讨论线性 Stark 效应.

$$\Delta\lambda_k = 0.0192\lambda^2(nn_F - n'n'_F)F.$$

$= C_k F$. 第 k 条子线裂距.

$$\therefore F_k = \frac{\Delta\lambda}{C_k},\quad dF_k = \frac{d(\Delta\lambda)}{C_k}$$

$\beta = F/F_0$. $\Phi(F)dF = W(\beta)d\beta$ 代入 $I(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda)$.

$$I(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda) = \sum_k I_k \Phi(F_k)dF_k = \sum_k I_k W(\beta_k)d\beta_k$$

$$= \sum I_k W\left(\frac{F_k}{F_0}\right) d\left(\frac{F_k}{F_0}\right) = \sum_k I_k W\left(\frac{\Delta\lambda}{C_k F_0}\right)\frac{d(\Delta\lambda)}{C_k F_0}.$$

令 $\alpha = \frac{\Delta\lambda}{F_0}$.

$$I(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda) = \sum_k I_k W\left(\frac{\alpha}{C_k}\right)\frac{d\alpha}{C_k} \equiv S(\alpha)d\alpha$$

$$a(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda) = AS(\alpha)d\alpha.$$

由 $a(\Delta\lambda) = a(\Delta\nu)$.

又由 $d(\Delta\lambda) = d\lambda = \frac{\lambda^2}{c}d\nu = \frac{\lambda^2}{c}d(\Delta\nu)$.

而 $\int a(\Delta\nu)d(\Delta\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c}f$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha)d\alpha = \sum_k I_k \int_0^{\infty} W(\beta_k)d\beta_k = \sum_k I_k = 1.$$

$$\int AS(\alpha)d\alpha = A = \int a_\lambda d\lambda = \int a_\nu \frac{\lambda^2}{c}d\nu$$

$$\approx \frac{\lambda^2}{c}\int a_\nu d\nu$$

$$\cong \frac{\pi e^2}{m_e c^2}\lambda^2 f.$$

$$a(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda)=\frac{\pi e^2}{mec^2}\lambda^2 f\sum_k I_k W\left(\frac{\alpha}{C_k}\right)\frac{d\alpha}{C_k}.$$

$$=\frac{\pi e^2}{mec^2}\lambda^2 f\sum_k I_k W\left(\frac{\Delta\lambda}{C_k F_0}\right)\frac{d(\Delta\lambda)}{C_k F_0}.$$

对于线翼 $\Delta\lambda$ 很大. β 也很大.

$$W(\beta)\approx 1.496\beta^{-\frac{5}{2}}$$

$$a(\Delta\lambda)=\frac{\pi e^2}{mec^2}\lambda^2 f\sum_k\frac{I_k}{C_k F_0}\left[1.496\left(\frac{C_k F_0}{\Delta\lambda}\right)^{5/2}\right].$$

$$=1.496\frac{\pi e^2}{mec^2}\lambda^2 f\frac{F_0^{3/2}}{(\Delta\lambda)^{5/2}}\sum_k I_k C_k^{3/2}.$$

$$\equiv C\frac{F_0^{3/2}}{(\Delta\lambda)^{5/2}}.$$

Balmer 系高号码谱线的近似公式.

对二次 Stark 效应.

$$\Delta\lambda_k=C_k'F^2=C_k'F_0^2\beta^2$$

$$\Rightarrow \beta_k=\sqrt{\frac{\Delta\lambda}{C_k'F_0^2}}$$

代回 $\sum_k I_k W(\beta_k)d\beta_k$.

求解.

碰撞理论和统计理论的应用范围

碰撞理论假设

1. 不碰撞，振子按 ν_0 辐射。

2. 忽略碰撞时的辐射。

而碰撞时的辐射主要在线翼上。

因此碰撞理论适用于线心。

而统计理论适用于碰撞时的辐射。

~~反之~~适用于线翼。

$$\Delta\omega_c = \frac{v^{\frac{n}{n-1}}}{(2\pi C_n \alpha_n^n)^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$\Delta\omega(r) = \frac{2\pi C_n}{r^n} \qquad \alpha_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta \, d\theta = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left[(n-1)/2\right]/\Gamma\left[n/2\right]$$

$\Delta\omega \ll \omega_c$，碰撞

$\Delta\omega \gg \omega_c$ 统计

按相互作用类型来讨论。$\Delta\nu = \frac{C_n}{r^n}$.

1、$n=2$

$$\Delta\nu = \frac{eC_2}{er^2} = \frac{C_2}{e}F.$$ F 为 Coulomb 场。

$n=2$ 是线性Stark效应的情形.

$\frac{C_2}{e}$ 为线性Stark效应的系数

H的某些谱线 $\lambda 4471$. $\lambda 4922$.

Balmer系 $H\alpha\, H\beta\, H\gamma\, H\delta$ 而言.

离子→统计 电子→碰撞.

来自电子 而 $\Delta\omega_c \propto \bar{v}$

显然 $v_{thermal,e} \gg v_{thermal,p}$.

$n=4$ 的情形.

$$\Delta V = \frac{C_4}{r^4} = \frac{C_4}{e^2} F^2 \quad F\text{为Coulomb场}.$$

二次Stark效应.

$$\Delta\lambda_c = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\Delta\omega_c = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\frac{\bar{v}^{4/3}}{(2\pi C_4 \alpha_4^4)^{1/2}}.$$

自由电子→碰撞.

离子 (C4较小, ~~需~~要 考虑碰撞).

C4较大. 几乎全是统计.

$n=4$ 的情况下, 统计比碰撞小得多. 离子作用常被忽略

$$= 2\pi N\bar{v}\left(\frac{2\pi C_4 \alpha_4}{\bar{v}\eta_0}\right)^{2/3}.$$

碰撞阻尼常数 $\gamma_4 = 38.8\, C_4^{2/3}\bar{v}^{1/3}N$. $\gamma_{e,4} \approx 3\gamma_{i,4}$.

C4 充分大的谱线，二次Stark效应很重要（自身场弱）

吸收原子和中性扰动原子（极化场）相互作用

$n=3$. 主要由碰撞近似

$\gamma_3 = 4\pi^3 C_3 N$.

$$C_3 \approx \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \nu_0} f_{ik}.$$

自我压力致宽正比于数密度平方. $\gamma_3 \propto \rho N$.

故对金属不重要.

$n=3$. 冷星的Balmer系 中性氢扰动.

太阳 $H\alpha$ 由 $n=3$ 致宽

$H\beta$ 由 $n=2$ 致宽.

$n=6$ 的情形.

Van der Waals 力.

要用碰撞理论处理. 扰动为H原子.

$\gamma_6 = 17.0\, C_6^{2/5}\, \bar{v}^{3/5} N$.

$C_6 = \frac{e^2\alpha}{h}\overline{R_k^2}$

Na D $\overline{R_k^2} = 41 a_0^2$

Ca II. H&K $= 23 a_0^2$.

轻金属、高激发能级

$$\frac{\overline{R_k^2}}{a_0^2} = \frac{n^{*2}}{2(r+1)^2}\left[5n^{*2}+1-3l(l+1)\right].$$

1、$T_{eff} < 6000K$.

大多数压力致宽由原子和中性氢 $n=6$ 碰撞产生.

C4 充分大.

共振线 resonance line $\varepsilon \to 0$. 可认为是纯散射

单位质量的吸收系数.

由低能态的一个原子计算的吸收系数

$\Rightarrow$ 单位质量的吸收系数.

$$dI_\nu = -I_\nu a_\nu N_{r,j}\, dh = -I_\nu a_\nu \frac{N_{r,j}}{\rho}\rho\, dh.$$

$\quad \shortparallel$

$-I_\nu l_\nu \rho\, dh.$

$$\rho = \sum_s m_s N_s = m_H \sum \frac{m_s}{m_H} N_s$$

$$= m_H \sum \mu_s N_s.$$

$$\Rightarrow l_\nu = a_\nu \frac{N_{r,j}}{\rho}.$$

$$= a_\nu = \frac{N_{r,j}}{\sum\limits_{r,j} N_{r,j}} \cdot \frac{\sum\limits_{r,j} N_{r,j}}{N_H} \cdot \frac{N_H}{\rho}.$$

令 $\mu_0 = \sum_s \frac{N_s m_s}{N_H} = \sum_s a_s m_s$.

上式

$= a_\nu \frac{N_{rij}}{N_Z} \cdot \frac{N_Z}{N_H} \cdot \frac{N_H}{\rho}$

$= a_\nu \frac{N_{rij}}{N_Z} \cdot \frac{N_Z}{N_H} \cdot \frac{1}{m\mu_0}$

$= a_\nu \frac{N_{rij}}{N_r} \cdot \frac{N_r}{N_Z} \cdot \frac{N_Z}{N_H} \cdot \frac{1}{m\mu_0}$

在LTE下

Boltzmann Eq (与T有关)　Saha Eq (与T, pe有关).　Element Abundance.

由于吸收线形成深度浅, 可用平均T, pe计算

a_ν的计算

常常计算那些贡献大的机制.

对于压力效应是碰撞致宽情形.

$a = \delta_{jk}/\Delta\nu_D$. $\delta_{jk} = (\gamma_j + \gamma_k + \gamma_c)/4\pi$;

$v = (\nu - \nu_{jk})/\Delta\nu_D$.

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu_0}} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2+(p-y)^2}\,dy = H(a,p).$$

实际计算先估算 r 的大小。

由线性 Stark 效应致宽的谱线

在线翼部分

$$a(\Delta\lambda) = C\frac{F_0^{3/2}}{(\Delta\lambda)^{5/2}} = C\frac{(2.61eN^{2/3})^{3/2}}{(\Delta\lambda)^{5/2}}$$

$$= Q(2.61e)^{3/2}\frac{p_e}{k_BT}\frac{C}{(\Delta\lambda)^{5/2}}.$$

1、2.4.6.7.8.10.

生长曲线的理论及应用.

没有精确的谱线轮廓.

理论上没有很好的大气模型.

不讨论谱线的轮廓或形状，只研究吸收线的总吸收，等值宽度 W_λ.

W_λ 与 $N_j f_{jk}$ → oscillation amplititude. 存在某种联系.

N_j → Column density.

S－S模型给出.

$$r_\nu = \frac{F_\nu}{F_\nu^0}$$

$$R_\nu = 1 - r_\nu = \frac{3}{4}\frac{\tau_\nu^0}{1+\frac{3\tau_\nu^0}{4}}$$

反变层线心光学厚度

$$X_0 \propto \rho k_c h \propto \frac{\sqrt{\pi}e^2}{m_e c}\frac{f_{jk}}{\nu_D}N_j h \propto f_{jk}N_j h \propto f_{jk}N_j$$

X_0很小.仅在线心频率处,连续背景上有一小的强度削弱.(小、W_λ)

随着X_0(N_j)增加而迅速增加.

$\hat{W}_\lambda$.

N_j稍大时,W_λ增速放缓(线心全部吸收).

$N_j f_{jk}$很大时,有较快增长(线翼参与吸收).

$\hat{W}_\lambda$

理论的生长曲线.

S－S模型.

$$r_\nu = \frac{F_\nu}{F_\nu^0} = \frac{H_\nu}{H_\nu^0} = \frac{1}{1+\tau_\nu^0 g(\tau_\nu^0)}$$

$\tau_\nu^0 \ll 1$, $g(\tau_\nu^0) \approx 1$　$\tau_\nu^0 \to \infty$　$g(\tau_\nu^0) \to \frac{3}{4}$. 单调减.

取 $g(\tau_\nu^0)=1$. $r_\nu=(1+\tau_\nu^0)^{-1}$

$\tau_\nu^0 \gg 1$ 时 $r_\nu \to 0$. $R_\nu \to 1$. 与观测不符合.

Minnaert 半经验公式 $\frac{1}{R_\nu}=\frac{1}{R_c}+\frac{1}{\tau_\nu^0}$

R_c → 最强吸收线的线心深度.

$\tau_\nu^0 \ll 1$. 有 $R_\nu \approx \tau_\nu^0$.

$\tau_\nu^0 \gg 1$ $R_\nu \approx R_c$.

其中 $\tau_\nu^0=\int N_j a_\nu dh$.

生长曲线只适用于压力碰撞. 辐射阻尼. 微观 Doppler 效应致宽的谱线

在反变层. 温度和阻尼常数变化不大.

$\tau_\nu^0=a_\nu\int N_j dh$

$=a_\nu \mathcal{N}_j$ ← Column density.

代回半经验公式

$$R_\nu=\frac{R_c}{1+\left(\frac{a_\nu \mathcal{N}_j}{R_c}\right)^{-1}}.$$

$$W_\nu = \int R_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{R_c}{1+\left(\frac{a_\nu N_j}{R_c}\right)^{-1}} d\nu$$

$$\Rightarrow \frac{W_\nu}{R_c} = \int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{a_\nu N_j}{R_c}\right)^{-1}} d\nu$$

a_ν 对 $\nu-\nu_0$ 对称

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{d(\nu-\nu_0)}{1+\left(\frac{a_\nu N_j}{R_c}\right)^{-1}}$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{d(\nu-\nu_0)}{1+\left(\frac{a_\nu N_j}{R_c}\right)^{-1}}$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{d(\nu-\nu_0)}{1+\left(\frac{a_\nu}{a_{\nu_0}} \cdot \frac{a_{\nu_0} N_j}{R_c}\right)^{-1}}$$

Def $X_0 \equiv a_{\nu_0} N_j = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{m_e c} \frac{f_{jk}}{\Delta\nu_D} N_j$ （线心光学厚度）.

$$D_0 = X_0 / R_c.$$

X_0, D_0 都 $\propto N_j f_{jk}$

上式

$$= 2\int_0^\infty \frac{d(\nu-\nu_0)}{1+\left(\frac{a_\nu}{a_{\nu_0}} \cdot D_0\right)^{-1}}$$

$N_j f_{jk}$ 较小，轮廓由线心（Doppler效应决定）.

$$a_\nu / a_{\nu_0} = e^{-[(\nu-\nu_0)/\Delta\nu_D]^2}$$

有 $\dfrac{W_\nu}{Rc} = 2\int_0^\infty \dfrac{d(\nu-\nu_0)}{1+e^{[(\nu-\nu_0)/\nu_D]^2}/D_0}$

$\underline{\underline{p=(\nu-\nu_0)/\Delta\nu_D}}$ $2D_0\Delta\nu_D\int_0^\infty (D_0+e^{p^2})^{-1}dp.$

若f_{ik}很小. $D_0 \ll 1$. 以至于$D_0 \ll 1$

作Taloy展开.

$$\frac{W_\nu}{Rc} = 2D_0\Delta\nu_D\int_0^{+\infty} e^{-p^2}(1+e^{-p^2}D_0)^{-1}dp.$$

$=$

$$= \sqrt{\pi}\,\Delta\nu_D D_0\left\{1-\frac{D_0}{\sqrt{2}}+\frac{D_0^2}{\sqrt{3}}\cdots\right\}.$$

若$D_0 \gg 1$. 取$b=\ln D_0$. $u=p^2$.

$$=2D_0\Delta\nu_D\int_0^\infty (e^b+e^{p^2})^{-1}dp.$$

$$=\Delta\nu_D\int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}}du}{1+e^{u-b}}.$$

但$N_i f_{ik}$依然较小. 仍由Doppler展宽.

D_0 进一步增大，等值宽度由线翼决定。

$$a_\nu = \frac{e^2}{m_e c}\delta_{jk} \cdot \frac{f_{jk}}{(\nu-\nu_{jk})^2 + \delta_{jk}^2}.$$

线翼 $(\nu-\nu_{jk})$ 很大，$a_\nu = \frac{e^2}{mc}\delta_{jk} f_{jk} (\nu-\nu_{jk})^{-2}$.

由 $W_\nu \to W_\lambda$.

$$W_\lambda = \int R_\lambda d\lambda = \int \frac{F_{\lambda_D} - F_\lambda}{F_\lambda} d\lambda$$

由 $F_\nu d\nu = F_\lambda d\lambda$.

$$\Rightarrow F_\lambda = F_\nu \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

由 $\nu = \frac{c}{\lambda}$.

$$\therefore F_\lambda = F_\nu \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$

$$W_\lambda = \int \frac{F_{\lambda 0} - F_\lambda}{F_\lambda} d\lambda$$

$$= \int \frac{F_{\nu_0} - F_\nu}{F_{\nu_0} \left(\frac{\nu_0}{\lambda_0}\right)} = W_\nu \frac{\lambda}{\nu}.$$

$$\Rightarrow \frac{W_\lambda}{\lambda} = \frac{W_\nu}{\nu}.$$

代回 W_ν.

(1) 弱线 ($D_0 \ll 1$). W_λ 与 R_c 无关

对给定 t_D. W_λ 与 X_0 线性增大.

~~因~~ $W_\lambda \propto N_j f_{jk}$.

(2) 中等强度. ($D_0 \gg 55$). W_λ 随 $N_j f_{jk}$ 变化很慢.

(对数开方).

(3) D_0 很大. W_λ 随 $(N_j f_{jk})^{1/2}$ 成比例增大.

如何通过观测资料来描绘生长曲线和求物理量

只讨论 S-S 模型的情况.

利用多重线来测量. 振子强度易从理论与实验得知.

↓

相同的 n.l. 能级差只有自旋与轨道耦合.

对多重线. N_j/g_j 为常量.

$$D_0=\frac{X_0}{R_c}=\frac{a\nu_0 N_j}{R_c}=\frac{1}{R_c}\frac{\sqrt{\pi}e^2}{m_e c}\frac{f_{jk}}{\Delta\nu_D}g_j\frac{N_j}{g_j}$$

$$\Rightarrow \lg D_0-\lg(g_j f_{jk})=\lg\left(\frac{1}{R_c}\frac{\sqrt{\pi}e^2}{m_e c}\frac{1}{\Delta\nu_D}\right)+\lg\frac{N_j}{g_j}=Const$$

用 $\lg g_j f_{jk}$ 代替 $\lg D_0$ 作为横坐标.

选取一系列 $g_j f_{jk}$ 已知的多重线.

测量每一条多重线的等值宽度 W_λ 与 W_λ/λ

每一多重线 $\lg W_\lambda/\lambda \sim \lg g_j f_{jk}$ 坐标上

在拟合过程中定出 $a=\frac{\delta_{jk}}{\Delta\nu_D}=\frac{\Gamma_{jk}}{4\pi\Delta\nu_D}$.

$$\frac{W_\lambda}{R_c}\frac{c}{\lambda\xi_D}=\pi^{3/4}\sqrt{a\frac{X_0}{R_c}}.$$

$$\Rightarrow \lg\left(\frac{W_\lambda}{\lambda_0}\right)+\lg\left(\frac{c}{R_c \zeta_D}\right)=\lg\pi^{3/4}+\lg a+\lg D_0.$$

沿纵坐标移动确定 $\lg\frac{c}{R_c\zeta_D}$. R_c 由分光观测给出.

$\Rightarrow \zeta_D$ 再由 $\zeta_D^2=\zeta_0^2+\zeta_t^2$

$$=\frac{2k_BT}{\mu m_H}+\zeta_t^2.$$

$\Rightarrow \zeta_t$.

$$\Rightarrow \frac{\Gamma_{jk}}{\nu_0}=\frac{4\pi}{c}a\zeta_D$$

再利用 $\lg D_0-\lg(g_jf_{jk})=\lg\left(\frac{1}{R_c}\frac{\sqrt{\pi}e^2}{m_ec}\frac{1}{\Delta\nu_D}\right)+\lg\frac{N_j}{g_j}$.

由已知 ν_D 与 R_c.

$\Rightarrow N_j$

由 Boltzmann Eq 与 Saha Eq. 得到原子核密度

生长曲线法假设.

i) 对所有元素 ζ_D 相同.

ii) 对所有谱线 $\frac{\Gamma_{jk}}{\nu_0}$ 相同.

2.3.

non-LTE.

恒星大气偏离LTE

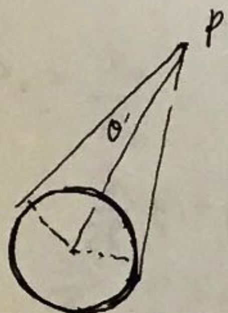
低密度 → 偏离LTE.

光子偏离更多.

即便粒子处于LTE. 但由于辐射场中的作用.

辐射场是非均匀且各向异性的.

恒星大气边界处 $I_\nu(\theta,0)=0$.



$$u_\nu = \frac{1}{c}\int_{\omega'} I_\nu\, d\omega = \frac{1}{c}\int_{\omega'} B_\nu(T)\, d\omega$$

$$= \frac{B_\nu(T)\,\omega'}{c}.$$

$$= \frac{4\pi B_\nu(T)}{c}\,\frac{\omega'}{4\pi}.$$

稀释

P的辐射释因子

$$W = \frac{\omega'}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta'} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos\theta').$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{R}{r}\right)^2}\right]$$

表面 $W=\frac{1}{2}$.

$$u_\nu = W\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

恒星大气辐射强度的跳跃

如 Balmer 跳跃.

只有在 $\tau_\nu\to\infty$ 时才 $I_\nu(\theta,\tau)\to B_\nu(T)$.

$$\Rightarrow B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT_r}-1}.$$

对任一点. 任方向, 辐射. 可以用一个确定的温度 T_r 来描述. T_r 是 (τ_ν,θ,ν) 的函数.

对任一小体元. 热运动物质特性用运动温度描述.

假理想气体下 ~~pV = N~~ $p = nk_BT$.

不同粒子也可能有不同的温度.

电子的速度分布

自由电子来源

1. 光致电离.

2. 碰撞电离.

最后重新被俘获.

在寿命内. 若弹性碰撞占优. 则趋近于 Maxwell 分布.

$$t_0 = \frac{1}{\sigma \bar{v} N} \overset{\text{Maxwell}}{\underset{\text{Distribution}}{=}} \frac{1}{\sigma N}\left(\frac{m_e}{3k_B T}\right)^{1/2}.$$

太阳型 电子 $\xrightarrow{H} H^-$

较热恒星大气 $T \approx 10^4 K$.

~~电子~~ $e^- + p = H$.

电子之间的碰撞截面.

$$\sigma_e = \pi \eta_0 \left(\frac{2e^2}{m_e \bar{v}^2}\right)^2 \ln\left(\frac{\lambda_D}{p_0}\right) = 4\pi\eta_0 \frac{e^4}{m_e^2 \bar{v}^4} \ln\left(\frac{\lambda_D}{p_0}\right).$$

$$t_1 = \frac{1}{\sigma_e \bar{v} N_e}$$

$$\frac{t_0}{t_1} = \frac{\sigma_e \bar{v} N_e}{\sigma \bar{v} N} = 17.9 \frac{e^4}{\sigma_T (3k_B T)^2} \ln\left(\frac{\lambda_D}{p_0}\right) \frac{\sigma_T}{\sigma} \frac{N_e}{N}.$$

Sun: $\sim 5 \times 10^5$.

Pf:

自由电子的非弹性碰撞.

i) $T < 10^4 K$.

少数~~氢原子才~~电子才能激发氢原子.

弹性 >> 非弹性.

ii). $T > 10^4 K$.

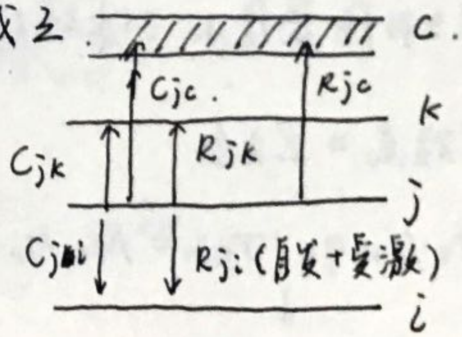
electron-electron 碰撞截面增大.

电子能量达到可激发氢原子时大部分氢已电离

$\left.\begin{matrix}\text{电子}\\\text{离子}\end{matrix}\right\} \rightarrow$ Maxwell

能级平衡方程.

理想热动平衡下. 细致平衡成立.

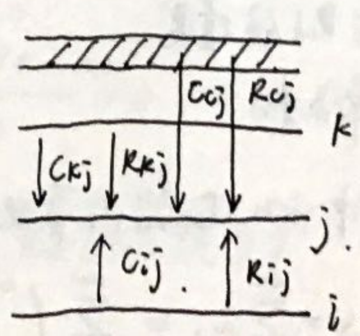


稳定状态 $\frac{dN_{r,j}}{dt} = 0$.

粗糙平衡.

所有的过程.

之和为0.



电离平衡

一般只考虑两个相邻能级

Σ光致电离 + Σ碰撞 = Σ光致复合 + Σ碰撞复合 (能量给第3个粒子)

↑ r次电离 ↑ r+1级电离

粒子数守恒下，给能级平衡方程提供附加关系

热动平衡下

Σ光离 = Σ光合

$R_{1c} = C_{c1}$

No-LTE情况

Corona 辐射密度小，光致电离可忽略，主要是碰撞电离

但物质密度小，三体碰撞可忽略 → 碰撞复合可忽略

Σ碰离 = Σ光合

$$N_e N_r q_c(T_e) = N_e N_{r+1} \alpha(T_e)$$

↓ r次电离原子与电子碰撞速率系数

↓ r+1次复合到所有能级

日冕中的电离只有电子的温度有关，与电子数密度无关

$$\alpha(T_e) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(v)\, v\, \beta_{ij}\, dv$$

↓ 碰撞截面

取 $T_e=13.6eV$. 日冕中 $\frac{N^{+}}{N}\sim10^{6}$. 远低于 $N_e=10^{8}cm^{-3}$ 的热动平衡. 故冕的电离情况对热动平衡偏离大.

行星状星云. 大多数密度很低. 碰撞忽略.

Σ光离 = Σ光合.

$$\sum_{j=1}^{\infty} R_{jc} = N_e N_{r+1} \alpha(T_e)$$

$$N_{r,j}(k'_\nu)_{r,j}\, d\nu \int I_\nu\, d\omega = N_{r,j}(k'_\nu)_{r,j}\, 4\pi J_\nu\, d\nu.$$

光致电离次数.

$$\frac{4\pi}{h}\frac{N_{r,j}(k'_\nu)_{r,j} J_\nu}{\nu} d\nu.$$

$$R_{jc} = \int \frac{4\pi}{h}\frac{N_{r,j}(k'_\nu)_{r,j} J_\nu}{\nu} d\nu.$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} R_{jc} = \frac{4\pi}{h}\int \sum_{j=1}^{\infty}\frac{N_{r,j}(k'_\nu)_{r,j} J_\nu}{\nu} d\nu.$$

$$= \frac{4\pi}{h} N_{r,1}\int_{\nu_1}^{\infty}\frac{(k_\nu)_{r,1} J_\nu}{\nu} d\nu = N_e N_{r+1}\alpha(T).$$

与电子温度. 内部辐射场. 电子数密度有关.

热平衡.

$G_H = L_C$.

气体加热 → 光致电离.

$$G_H^{bf}(H) = N_H \int_{\frac{\chi_H}{h}}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu}{h\nu} (h\nu - \chi_H)(k_\nu)_{bf}\, d\nu.$$

气体冷却.

1) 离子的复合.

2) 轫致辐射.

3) 碰撞.

$$L_C^R = (N_e N^+ \alpha^{(1)})\, kBT.$$ 复合到所有能级.

轫致辐射.

f-f transition.

经典上由于加速运动产生了辐射.

$$L_C^{ff}(Z) = 4\pi j_{ff}$$

$$= \frac{2^5 \pi e^6 Z^2}{3^{3/2} h m_e c^3} \left(\frac{2\pi kBT}{m_e}\right)^{1/2} \bar{g}_{ff} N_e N^+.$$

实际上是~~电子~~电子-电子轫致辐射. 与频率无关 高温贡献大

尤其由在Corona中. $N^+ = N_{He}^+ + N_p$.

碰撞激发.

恒星形成. 低激发态. 气体的主要冷却~~形成~~作用.

$$G_M^{bf} = L_C^R + L_C^{ff} + L_C^c.$$

$$G_H^{bf} - L_C^R = L_C^{ff} + L_C^c$$

源方程.

谱线展宽. 自发发射分布

$$j_\nu \rho = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ki} N_k \psi_\nu.$$

$$k_\nu \rho = \frac{h\nu}{4\pi} \left(B_{jk} N_i - B_{ki} N_k \right) \varphi_\nu.$$

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} = \frac{A_{ki}}{B_{kj}} \frac{1}{\frac{g_k N_j}{g_j N_k} - 1} \frac{\psi_\nu}{\varphi_\nu}.$$

已利用 $g_j B_{jk} = g_k B_{kj}$.

$$\frac{A_{kj}}{B_{kj}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}.$$

只有当 $\psi_\nu = \varphi_\nu$. 且 N_j / N_k 满足Boltzmann公式

源函数才转化为Planck函数.

$$\frac{N_j}{N_k} = \frac{N_j}{N_j^*}\frac{N_j^*}{N_k^*}\frac{N_k^*}{N_k}$$

$$= \frac{b_j}{b_k}\frac{g_j}{g_k} e^{\frac{\chi_j-\chi_k}{k_B T}}$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\frac{b_k}{b_j}e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}\frac{\psi_\nu}{\varphi_\nu}.$$

发射线的形成机制.

以行星状星云为例.

核星温度很高. FUV辐射强.

稀释因子 10^{-14}.

星云光学薄

$\cancel{W=}\ u_\nu = W u_\nu^*$

$\Rightarrow u = W u_\nu$

$a_1 T_1^4 = W a_1 T^{*4}$

$\therefore T_1 = W^{1/4} T^*$. 取 $T^* = 3\times10^4$ K

$T_1 \approx 10$ K. Non-LTE. 远红外.

Rossland Th.

一个稀释化的辐射场，将紫外转化为红外辐射。

在量子上表现为将一个高频光子转化为多个低频光子。

$W \ll 1$ 时 比率正比于 W^{-1}，发射线的产生。

禁线条件

偏极跃迁

$\Delta S = 0$

$\Delta L = 0, \pm 1$

$\Delta J = 0, \pm 1$.

$\Delta M_J = 0, \pm 1$ （但 $0 \to 0$ 禁戒）． $\nu \approx 10^7 \sim 10^9 s^{-1}$

电四极跃迁（$\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$）．

磁偶极跃迁（$\Delta S = \pm 1, \Delta L = \pm 1$）． $\nu \sim 10^{-5} s^{-1}$

[OIII]．

半禁戒跃迁

只有高能态是亚稳态．（除了禁戒跃迁外，没有其他低能态）．

且大部分粒子处于亚稳态．

（辐射密度、粒子密度都较小）．

$$W \ll \frac{A_{21}}{A^{\circ}_{21}}$$ (不让电离).

$$Ne \ll \frac{A_{21}}{q_{21}}$$ (不让碰撞离开亚稳态).

[OIII] λ5007 线.